CÁLCULO NUMÉRICO

PROF. MSc. GILMAR DA SILVA

JUL/2010

**APLICATIVOS**       Com o objetivo de eliminar cálculos repetitivos e/ou trabalhosos alguns conteúdos apresentarão aplicativos. No índice os aplicativos estão indicados por **aplic.nº**  - xls, onde xls é o link para as páginas onde estão os aplicativos.  
       Ao clicar nos links "xls" serão abertas planilhas de programas que provavelmente estão instalados em seu computador. Estas planilhas podem ser exibidas no EXCEL ( do Microsoft Office),  no STARCALC (do Staroffice),  BROFFICE CALC (do BrOffice ou OpenOffice), entre outros.  
       Em cada aplicativo são apresentadas informações de como utilizá-los.

       Recomendamos ao aluno que estude o conteúdo e aprenda a resolver os problemas também sem o uso dos referidos aplicativos, pois, em concursos ou outras disciplinas que você cursará, não será permitido o uso do mesmo.   
       Além disso, para cursos ligados à computação, o aluno deve procurar observar como são criados os aplicativos. A lógica usada nos aplicativos pode servir como exemplo de linguagem de computação para uso em outras linguagens.   
       
        Chamamos a atenção do usuário para que observe as informações sobre quais células podem ser modificadas. Em geral elas são apresentadas com valores em vermelho. Nos aplicativos as células que não podem ser modificadas estão travadas. Entretanto, em alguns programas como o Starcalc, o travamento da célula não é mantido. No Excel e BrOffical Calc o travamento das células é mantido.  
        Caso você modifique células que contém cálculos (fórmulas) feche o aplicativo sem salvá-lo e abra-o novamente.

CAPÍTULO 01 – ERROS

1.1 – INTRODUÇÃO 04

1.2 – ERROS 04

1.3 – SISTEMA DE BASES NUMÉRICAS 04

1.4 – CONVERSÃO DE NºS INTEIROS NAS BASES DECIMAL E BINÁRIA 05

1.5 – NOTAÇÃO DE NÚMEROS ENTRE 0 E 1. 07

1.9 – ERROS ABSOLUTO E RELATIVO 08

1.10 – ERROS DE TRUNCAMENTO EM UM SISTEMA DE ARITMÉTICA DE PONTO

FLUTUANTE 08

EXERCÍCIOS 09

1.11 – ERROS DE ARREDONDAMENTO EM UM SISTEMA DE ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE 09

1.12 – ERROS NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS DE PONTO FLUTUANTE 09.

1.13 – ESTIMATIVA DE ERROS NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS DE PONTO FLUTUANTE 10

EXERCÍCIOS 11

CAPÍTULO 2 – ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

2.1 – INTRODUÇÃO 12

2.2 – RAÍZES OU ZEROS DE UMA FUNÇÃO REAL 12

2.3 – DETERMINAÇÃO DE RAÍZES REAIS 12

2.4 – ISOLAMENTO DAS RAÍZES 13

2.5 – REFINAMENTO 15

2.6 - MÉTODO DA BISSECÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES 15

2.7 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA DETERMINAÇÃO DE RAÍZES 17

2.8 - MÉTODO DA SECANTE 19

EXERCÍCIOS - 21

CAPÍTULO 3 - RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

3.1 – PRELIMINARES 22

3.2 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES TRIANGULARES 22

3.3 – MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO) 23

3.4 – MÉTODOS ITERATIVOS 26

3.5 – MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI 26

3.6 – USANDO O EXCEL (OU STARCALC) 28

3.7 - MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL 28

EXERCÍCIOS - 30

CAP 04 - INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÕES

4.1 – PONTOS E GRÁFICOS 31

4.2 – O QUE É A INTERPOLAÇÃO 31

4.3 – INTERPOLAÇÃO POR RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR 31

EXERCÍCIO 32

4.4 – PROCESSO DE LAGRANGE 33

4.5 – MÉTODO DE NEWTON 33

4.6 – ERRO NA INTERPOLAÇÃO NO MÉTODO DE NEWTON 35

4.7 – FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR 36

4.8 – INTERPOLAÇÃO INVERSA 37

EXERCÍCIOS 38

CAP 5 - MÍNIMOS QUADRADOS

5.1 – INTRODUÇÃO 40

5.2 – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA CASO DISCRETO 40

5.3 – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA CASO CONTÍNUO 45

5.4 - AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS 47

5.5 - CONSTRUINDO E FORMATANDO GRÁFICOS NO EXCEL 47

5.6 - A FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU 48

5.7 - LINEARIZANDO A FUNÇÃO ax2 + bx + c 50

5.8 - FUNÇÃO EXPONENCIAL 51

5.9 - LINEARIZANDO UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL 51

5.10 - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 53

5.11 - FUNÇÕES RACIONAIS 55

EXERCÍCIOS 56

CAP.06 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

6.1 – INTRODUÇÃO 58

6.2 – REGRA DO PONTO MÉDIO 58

6.3 - REGRAS DO PONTO À ESQUERDA E DO PONTO À DIREITA 59

6.4 - REGRA DO TRAPÉZIO 60

6.5 - REGRA DE SIMPSOM 61

6.6 - ERROS NAS REGRAS DO TRAPÉZIO E DE SIMPSON 62

6.7 – A REGRA DO TRAPÉZIO PARA VALORES TABELADOS 63

6.8 – A REGRA DE SIMPSON PARA VALORES TABELADOS 64

EXERCÍCIOS 64

**CAPÍTULO 01 – ERROS**

**1.1 – INTRODUÇÃO**

Em conteúdos anteriores você aprendeu a resolver algumas equações, determinar uma integral definida entre tantos outros cálculos. Estes cálculos envolviam fórmulas que permitiam resolver o problema algebricamente. Entretanto, nem toda equação, nem toda integral definida, etc, poderá ser resolvida mediante as regras conhecidas. Para resolver estes e outros problemas você deverá lançar mão de processos numéricos, que por meio de aproximações levam à solução do mesmo.

**1.2 – ERROS** Em toda medida, bem como em operações, o erro é um elemento sempre presente.   
Tomamos por exemplo a realização da medida do comprimento da barra abaixo:

bases1

Para tal podemos usar uma régua centimetrada, isto é, uma régua cuja menor divisão é o centímetro.   
Posicionando a régua adequadamente teremos:

bases2

Observe que o comprimento da barra é maior que 34 cm e menor que 35 cm. É convencionado adotar para tal situação uma leitura como 34,7 cm onde o dígito 7 é um valor impreciso. Tal dígito é chamado de algarismo duvidoso.   
**Regra 1** – Ao usar um aparelho de medida devemos indicar na leitura até décimos da menor divisão da escala, salvo quando indicado pelo fabricante.   
Se a régua fosse milimetrada teríamos:

bases3

A medida da barra agora é maior que 34,6 cm e menor que 34,7 cm. A medida da barra deve ser então representada por 34,68 cm. Neste caso, o dígito 6 é correto enquanto que o dígito 8 é aproximado.  
 Se as medidas já apresentam erros, evidentemente, ao operar com elas os erros irão se propagar tornando os resultados cada vez mais distantes da realidade.

Uma classe de erro que se deve levar em conta está ao utilizar dispositivos que efetuam cálculos como computadores, calculadoras, régua de cálculo, etc. Todos estes dispositivos limitam a quantidade de algarismos nos resultados e, isto implicará em erros que devem ser conhecidos de modo a ser ter alguma precisão do resultado.   
Nos computadores e calculadoras os dados de entrada são expressos na base dez e nestes dispositivos convertidos para a base binária com a qual se efetuam os cálculos. Estes são novamente convertidos para a base dez para transmissão ao usuário. As conversões são outras fontes de erros.   
  
**1.3 – SISTEMA DE BASES NUMÉRICAS**

**Definição 1**. Seja uma base numérica B. Um número na base B é representado na forma

(bnbn-1bn-2...b2b1b0)B, sendo 0 < bj < (B – 1), j = 1, 2, 3 ... n. Os termos bj são denominados dígitos usuais para a base B.  
Exemplo 1: B = 10 (base decimal) dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (465228)10 indica um número expresso na base 10.  
Exemplo 2: B = 2 (base binária) dígitos 0 e 1. (11001)2 indica um número expresso na base 2.

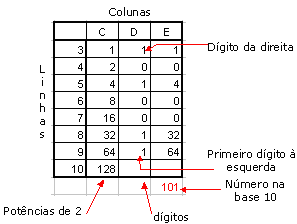
**Definição 2.** O número (bnbn-1bn-2...b2b1b0)B pode ser escrito na forma polinomial   
                                  bn.Bn + bn-1.Bn-1 + bn-2.Bn-2 + ... + b2B2 + b1B1 + b0B0.

Exemplo 3: (210022)3 = 2.35 + 1.34 + 0.33 + 0.32 + 2.31 + 2.30Exemplo 4: (2297)10 = 2.103 + 2.102 + 9.101 + 7.100Nota 1. Como a base 10 é a base canônica (corrente) não há necessidade de indicá-la. Assim, 4376 é um número escrito na base 10.     
  
**1.4 – CONVERSÃO DE NºS INTEIROS NAS BASES DECIMAL E BINÁRIA.**

Daremos importância a estas duas bases, pois a base decimal é a base usada para que o usuário se comunique com máquinas de calcular e computadores e a base binária é a base usada pelas máquinas nas operações.   
O processo de conversão de bases utiliza repetidas operações. Assim, podemos utilizar um aplicativo que realiza tais repetições evitando assim um excesso de trabalho. É possível criar aplicativos usando diferentes linguagens como o Pascal, Java, etc.   
Usaremos, devido a facilidade e o provável conhecimento da grande maioria dos usuários os aplicativos que trabalham com planilhas como o Excel (Microsoft Office da Microsoft), o StarCalc (StarOffice da Sun Microsystems) e o BROfice. O StarOffice, até a versão 5.2 e o BROfice podem ser obtidos gratuitamente na Internet.

**a) Conversão de número inteiro da base 2 para a base 10.** Seja, por exemplo: (1100101)2 um número escrito na base 2.   
Escrevendo sua forma polinomial temos:  
                                    (1101101)2 = 1.26 + 1.25 + 0.24 + 1.23 + 1.22 + 0.21 + 1.20.  
Efetuadas as operações indicadas resulta: 1.64 + 1.32 + 0.16 + 1.8 + 1.4 + 0.2 + 1.1 =  
= 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 109 (na base 10).

Usando o Excel ou o StarCalc  
(1) Nas células C3 digite o número 1.  
(2) Na célula C4 digite = C3\*2 para multiplicar o conteúdo da célula C3 por 2. A seguir pressione ENTER.  
No lugar de digitar C3 você pode clicar na mesma que ela será exibida no lugar devido.  
Na célula C4 será exibido o valor 2.  
(3) Clique na célula C4 para selecioná-la. No canto inferior direito será exibido um pequeno quadrado preto.  
(4) Posicione o ponteiro do mouse sobre esse quadrado.  
Mantendo o botão direito do mouse pressionado arraste-o pelas células abaixo da célula C4.  
Este procedimento irá copiar a fórmula para as demais células.  
Na coluna serão exibidas as potências de 2.  
(5) Na célula D3, D4, D5, ... digite os algarismos que constituem o número a ser convertido sendo que em D3 deve-se escrever o primeiro algarismo da direita.  
(6) Na célula E3 digite = C3\*D3 e pressione ENTER.   
(7) Clique na célula E3 e repita o procedimento para copiar a fórmula para as células da coluna E.  
(8) Clique na célula abaixo da última célula preenchida da coluna E. Vamos chamá-la de Em.  
(9) Na barra de ferramentas abaixo da barra de menu clique no sinal Σ para obter a soma dos valores da coluna E.  
(10) Pressione ENTER.  
Na célula Em será exibido o número obtido ao transformar para a base 10.



Para o número (1100101)2 o resultado será:

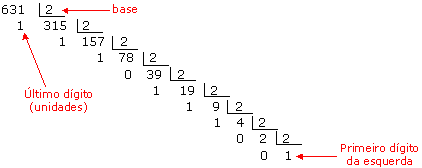
Para converter outros números basta digitá-los (um de cada vez, é claro!) na coluna D, substituindo os valores exibidos.

Experimente converter os números abaixo para a base 10.  
a) 1111111(2)        b) 10001(2)

c) 110011(2)          d) 1011101110111(2).

**b) Conversão de número inteiro da base 10 para a base 2.** Seja converter o número 631 da base 10 para a base 2.   
Aplicando o algoritmo da divisão (N = D.Q + r), temos:  
631 = 2.315   + 1 ⇒ b0 = 1 (primeiro dígito da direita).  
315 = 2.157   + 1 ⇒ b1 = 1  
157 = 2.78 + 1 ⇒ b2 = 1   
78 = 2.39 + 0 ⇒ b3 = 0   
39 = 2.19 + 1 ⇒ b4 = 1   
19 = 2.9 + 1 ⇒ b5 = 1   
9 = 2.4 + 1 ⇒ b6 = 1   
4 = 2.2 + 0 ⇒ b7 = 0   
2 = 2.1 + 0 ⇒ b8 = 0   
1 = 2.0 + 1 ⇒ b9 = 1.  Assim, 631 = 10011101112.

Pode-se também o procedimento das divisões sucessivas, conforme indicado abaixo:

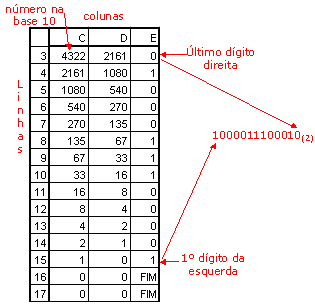


Neste procedimento, cada quociente é dividido por 2, até que o quociente torne-se igual a 1.  
Os restos e o último quociente constituirão o número expresso na base 2.

Processos semelhantes podem ser usados para converter da base 10 para qualquer outra base. Basta tomar como divisor o valor da base desejada.

**No Excel ou StarCalc**Transformando 4322 para a base 2.

(1) Na célula C3 digite o número desejado, no caso 4322.  
(2) Na célula D3 digite =TRUNCAR(C3/2) e pressione ENTER - a função TRUNCAR permitira que o quociente seja um número inteiro.  
(3) Na célula E3 digite =SE(E(C3=0;D3=0);"FIM";C3-2\*D3) e pressione ENTER.  
(4) Na célula C4 digite =D3  
(5) Copie o conteúdo da célula D3 para a célula D4.  
(6) Copie o conteúdo da célula E3 para a célula E4.  
(7) Selecione as células C4, D4 e E4.   
Copie as fórmulas até as células Cm, Dm, Em   
Na coluna E você terá o número escrito em C3 (base 10) expresso na base 2.  
O dígito exibido na célula E3 é o primeiro dígito da direita (unidades) no número.  
A figura abaixo mostra o resultado dos passos acima.



Observando a coluna E temos: 4322 = 1000011100010(2).

**1.5 – NOTAÇÃO DE NÚMEROS ENTRE 0 E 1.**  **Definição 3**: as notações (0,b1b2...bn..)B ou (0.b1b2...bn...)B são usadas para representar um número compreendido entre 0 e 1 na base B cuja forma polinomial é b1.B-1 + b2.B-2 + ... + bn.Bn + ... .  
A seqüência b1b2...bn.. é denominada **mantissa** do número (0,b1b2...bn..).

**(a) Convertendo número menor que 1 da base 2 para a base 10.**  
       De acordo com o exposto acima, o número (0,b1b2...bn..)2 tem a forma polinomial  
                                  b1.2-1 + b2.2-2 + b3.2-3 + .... + bn.2-n.  
Deste modo, basta efetuar as operações indicadas e teremos o resultado na base 10.  
Tomemos, por exemplo, o número 0,11001(2).  
Para tal temos:  1.2-1 + 1.2-2 + 0.2-3 + 0.2-4 + 1.2-5 = 1.(1/2) + 1.(1/4) + 0.(1/8) + 0.(1/16) + 1.(1/32) =  
= 1x0,5 + 1x0,25 + 0x0,125 + 0x0,0625 + 1x0,03125 = 0,78125(10). A indicação (10) é desnecessária.

**No Excel ou Starcalc**



Na célula D5 digite: =1/2.  
Selecione a célula D5 e copie a fórmula para as células D6, D7, D8, ... D17 (ou mais).  
Digite a mantissa, na coluna E, sendo que o primeiro dígito após a vírgula deverá ser digitado em E5.  
Na célula F5 digite: = D5\*E5.  
Copie o conteúdo de F5 para as células F6, E6, D6, ... F17 (ou mais).  
Clique na célula F18. A seguir, clique no botão de somatório Σ que está na barra de ferramentas e pressione ENTER.  
O número exibido na célula F18 é o valor do número expresso na base 10.  
Para transformar qualquer outro número na base 2 para a base 10 basta substituir os dígitos da coluna F.

Experimente converter os números abaixo para a base 10.  
a) 0,1111101                          b) 0,001011                         
c) 0,10101                   d) 0,110011011

**1.9 – ERROS ABSOLUTO E RELATIVO**

Conforme já comentado anteriormente, o erro está sempre presente em cálculos devido à limitação das máquinas. É necessário se ter uma estimativa desse erro de modo a se ter alguma confiança nos cálculos ou nas medidas.  
 **Definição 5**: Seja X o valor exato de uma medida e X’ um valor aproximado.   
Chamamos de **ERRO ABSOLUTO** referente à medida X (EAX) à diferença entre o valor exato e o valor aproximado.  Isto é: EAX = X – X’.

Em geral, apenas o valor aproximado X’ é conhecido. Neste caso utiliza-se uma estimativa para o módulo do erro absoluto tendo por base um limite superior.   
Tomando por exemplo √2 ∈ [1,411, 1,412], qualquer valor de √2 dentro desse intervalo teremos:  
|EAX| = |√2 – X| < 0,01, onde 0,01 é a amplitude do intervalo [1,411, 1,412].

**Definição 6**. define-se o erro relativo de uma grandeza X, à razão entre o erro absoluto e o valor aproximado usado para essa grandeza.

Escrevemos: ERx = EAx/X’.  
            **Definição 7.** Uma medida Y tem **maior precisão** que outra medida X se o valor absoluto do erro relativo da medida Y for **menor** que o erro relativo da medida X.  
  
**1.10 – ERROS DE TRUNCAMENTO EM UM SISTEMA DE ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE**

Num sistema de Aritmética de Ponto Flutuante, a máquina estabelece o número de dígitos da mantissa.  
Conforme já foi definido, o truncamento se dá com a eliminação dos dígitos que ultrapassam a quantidade de dígitos usada pela máquina.  
 Seja então um número x = 0.2342345 x 103 que deve ser truncado no quarto algarismo após a vírgula. Deste modo x’ = 0.2342 x 103, e em conseqüência EAx = 0.0000345 x 103 = 0.345 x 10-1 < 10-1.  
         Seja então o número x = 0.b1b2b3b4...bk...bn . 10m. Ao truncá-lo no dígito de ordem k, teremos:  
x' = 0.b1b2b3b4...bk . 10m.   
O erro será então EAx = 0.000...0bk.....bn . 10m = 0.bk+1...bn . 10-k.10m = 0.bk+1...bn . 10m-k < 10m-k.  
Se x é um número negativo, devemos considerar o seu valor absoluto e nesse caso usar o valor absoluto do erro absoluto.  
De acordo com o exposto podemos estabelecer a seguinte regra:

**"ao truncar a medida X = 0.b1b2b3b4...bk...bn . 10m para k  dígitos na mantissa, o valor absoluto do erro absoluto será menor que 10m-k.**

O valor absoluto do erro relativo, já definido anteriormente é |ERX| = |parte truncada|/|x’|.   
Como a parte truncada é menor que 10m-k e x’ = 0.a1a2a3... x 10m > 0,1 x 10m = 10m - 1, teremos   
|ERX| < 10m-k/10m-1 = 10-k+1. Assim,   
   
**" ao truncar a medida X = 0.b1b2b3b4...bk...bn . 10m para k  dígitos na mantissa, o valor absoluto do erro absoluto será menor que 10-k+1.**

**EXERCÍCIOS**  
1. Calcule os valores absolutos dos erros absoluto e relativo devido ao truncamento num sistema de ponto flutuante que opera com 5 dígitos (mantissa).  
A) 0.231567 x 104 B) 0,916354211 x 108.

2. Faça uma estimativa (limite) dos valores absolutos dos erros absoluto e relativo devido ao truncamento em um sistema de ponto flutuante que opera com 3 dígitos, para:  
A) 0,61254 x 102 B) 0,214672 x 10-3.

**1.11 – ERROS DE ARREDONDAMENTO EM UM SISTEMA DE ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE**

Num sistema de Aritmética de Ponto Flutuante onde o número de dígitos é p, se o dígito de ordem p + 1 for superior ou igual a 5, o dígito de ordem p é acrescido de 1 unidade. Se o dígito de ordem p + 1 foi inferior a 5, o dígito de ordem p é mantido.   
Tomando, por exemplo, para os números X = 0.2345**8**7 x 106 e Y = 0.2345**2**1 x 106, num sistema que opera com 4 dígitos, teremos X’ = 0.234**6** x 106 e Y’ = 0.234**5** x 106.  
Note que em X’ o dígito 5 foi substituído por 6 pois 8 > 5 e em Y’ foi mantido o dígito 5 pois 2 < 5.  
Para X, o valor absoluto do erro absoluto foi de   
|EAX| = |X – X’| = |0.2345**8**7 x 106 - (0.2345 + 0.0001)x106| =  
= |(0.2345 + 0.000087).106 - (0.2345 + 0.0001)x106| = |(0.000087 – 0.0001).106| =  
= |(0,87 – 1).106-4| = |-0,13.102|.  
Desejando apenas um limite superior para o erro, |-0,13.102| < (1/2).102.  
**Observação 1**: indicando a parte a ser arredondada sob a forma de ponto flutuante, teríamos  
0.000087 x 106 = 0.87.106-4, onde 6 é o expoente da base em X (ou X’) e 4 é o expoente da base na parte a ser arredondada.  
**Observação 2**: se a parte a ser arredondada fosse 5 x 106, o erro seria igual a (1/2)x102.  
O valor absoluto do erro relativo é de:  
|ERX| = |X – X’|/|X’| = |-0,13.102|/|0.234**6** x 106| = 0.5541.10-4.  
Desejando apenas um limite superior para o erro, |X – X’| < (1/2)x102 e |X’| > 0.1x106 ⇒   
|ERX| < (1/2)x102 / 0.1x106 = (1/2).102-6+1 = (1/2).10-3.  
Para Y, |EAY| = |0.2345**2**1 x 106 - 0.234**5** x 106| = |0.000021.106| = 0.21.106.10-5 = 0.21.101.   
Como o primeiro dígito após o dígito a ser exibido é menor que 5, podemos garantir que |EAY| < (1/2).101.  
|ERY| = |0.21.101|/|0.234**5** x 106| = 0.8955 x 10-5,  
Para estimar o limite superior temos:  
|EAY| < (1/2).101 e X > 0.1 x 106 ⇒ |ERY| < (1/2).101/0.1x106 < (1/2).10-4.

Pelos exemplos acima, e comparando com o exposto para os valores absolutos dos erros absoluto e relativo no processo de truncamento, vemos que no processo de arredondamento, as previsões para estes erros serão menores que a metade das previsões feitas para o processo do truncamento.   
Do exposto acima, através dos exemplos, pode-se concluir:

**"ao arredondar o número X = 0.b1b2b3...x10m, para pk dígitos na mantissa o valor absoluto do erro absoluto é menor que (1/2).10m-ke o valor  absoluto do erro absoluto é menor que (1/2).10-k+1."**

**1.12 – ERROS NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS DE PONTO FLUTUANTE**

Qual seria o resultado da operação (0.835 . 103 x 0.689 . 102) x 0.787 . 105 num sistema de aritmética de ponto flutuante de três dígitos?  
O valor exato dessa operação seria: 0,452772905 . 1010. A máquina efetuará cada operação e, para cada resultado, ela registra na memória o valor truncado ou arredondado, de acordo com o processo programado na mesma.  
Usando o processo do truncamento, a primeira multiplicação teria como valor exato 0,575315 . 105, que seria truncado para 0.5753 . 105 e que seria registrado na memória.  
Este valor seria multiplicado por 0.787.105, resultando exatamente 0,4527611 x 1010, e registrado na memória o valor 0.4527 . 1010.  
Na primeira operação já subsiste um erro que será levado para a segunda operação onde novo erro será cometido.   
Note a diferença entre o resultado exato e o resultado sem truncamento após a segunda operação. Assim, é fundamental que se conheça a limitação da máquina para que se tenha confiança no resultado final da operação. Imagine que os valores iniciais sejam as arestas de um paralelepípedo e que a operação represente o volume do mesmo. Até que ponto é confiável o resultado?

**1.13 – ESTIMATIVA DE ERROS NAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS DE PONTO FLUTUANTE**

  Sejam X e Y os valores absolutos exatos de dois números e X’ e Y’ os valores absolutos arredondados ou truncados num sistema aritmético de ponto flutuante.  
De acordo com a definição de erro absoluto (EA), X = X’ + EAX e Y = Y’ + EAY.  
 **(A) ADIÇÃO**  
**Erro absoluto**: X + Y = X’ + EAX + Y’ + EAY = (X’ + Y’) + (EAX + EAY) ⇒ **EAX+Y** **= EAX + ERY** ⇒ **o erro absoluto da soma é igual à soma dos erros absolutos.**  
**Erro relativo**: ERX+Y = EAX+Y/(X’ + Y’) = (EAX + ERY)/ (X’ + Y’) = (EAX/X’).[X’/(X’ + Y’)] + (EAY/Y’).[Y’/(X’ + Y’)] €⇒ **ERX+Y** = **ERX.[X’/(X’ + Y’)] + ERY.[Y’/(X’ + Y’)]**.

**(B) SUBTRAÇÃO**Por procedimento semelhante se demonstra  
**EAX – Y = EAX – EAY** e     **ERX – Y = ERX.[X’/(X’ - Y’)] - ERY.[Y’/(X’ - Y’)].**

**(C) MULTIPLICAÇÃO**   
**Erro absoluto:** X.Y = (X’ + EAX) + (Y’ + EAY) = X’.Y’ + X’.EAY + Y’.EAX + EAX.EAYComo EAX.EAY é muito pequeno, pode-se escrever  
X.Y = X’.Y’ + X’.EAY + Y’.EAX  ⇒ **EAX.Y = Y’.EAX + X’.EAYErro relativo:** ERX.Y = (Y’.EAX + X’.EAY)/X’.Y’ = Y’.EAX/X’.Y’ + X’.EAY/X’.Y’ ⇒ **ERX.Y = EAX/X’ + EAY/Y’.** **(D) DIVISÃO  
Erro relativo:** X/Y = (X’ + EAX)/(Y’ + EAY) = (X’ + EAX)/Y’[1/(1 + EAY/Y’)].   
Por desenvolvimento de 1/(1 + EAY/Y’) sob forma de uma série (assunto a ser estudado futuramente) e desprezando os teremos de grau igual ou maior que 2, resulta:  
X/Y = X’/Y’ + EAX/Y’ – X’EAY/Y’2 ⇒ **EAX/Y = (Y’.EAX – X’.EAY)/Y’2.**   
Erro absoluto: ERX/Y = [(Y’.EAX – X’.EAY)/Y’2]/(X’/Y’) = EAX/X’ – EAY/Y’ €⇒ **ERX/Y = ERX - ERY.**

Aplicações:

1. Calcular o erro absoluto e o erro relativo ao ser efetuada a operação x + y.z num sistema de aritmética de ponto flutuante de 4 dígitos, sendo x = 0.65237 x 106; y = 0.23465 x 102 e z = 0.367891 x 104, adotando o processo de truncamento.  
O valor real de x + y.z é 0.65237 x 106 + 0.08632562315 x 106 = 0.73869562315 x 106.  
Ao efetuar a operação no sistema de aritmética de ponto flutuante, a cada operação se faz a aproximação para os 4 dígitos do sistema.  
Assim, y’.z’ = 0.086 x 106 e x’ + y’.z’ = 0.7383 x 106.  
Erro absoluto cometido: 0.73869562315 x 106 - 0.7383 x 106 = 0.00039562315 x 106 = **0.3956 x 103.**Erro relativo: ER = EA/X’ = 0.39562315 x 103/0.7383 x 106 = **0.5358 x 10-3**.

2. Considere X = 0.5124 x 104, Y = 0.123 x 102 e Z = 0.8867 x 103. Para um sistema aritmético de ponto flutuante com 3 dígitos, calcule os erros absoluto e relativo ocorridos nas operações, usando o processo de arredondamento. Utilize as fórmulas desenvolvidas para propagação de erros:  
a) X + Y                  b) Z.X                       c) 2.X  
Calculando os erros absolutos:  
Para X:        X = 0.5124 x 104, X’ = 0.512 x 104 (3 dígitos), EAX = X – X’ = 0.0004 x 104 = 0.4000 x 101.  
ERX = EAX/X’ = 0.4000 x 101/0.512 x 104 = 0.781 x 10-3.  
Para Y:       Y = 0.123 x 102, Y’ = 0.123 x 102, EAY = Y – Y’ = 0. ERY = 0.   
Para Z:        Z = 0.8867 x 103, Z’ = 0.887 x 103 (arredondamento), EAZ = 0.8867 x 103 – 0.887 x 103 = -0.0003 x 103 = -0.3 x 100 = -0,3; ERZ = -0,3/0.887 x 103 = 0,338 x 10-3.   
Desta forma:  
a) EAX+Y = EAX + EAY = 0.4000 x 101 + 0 = **0.4000 x 101.**ERX+Y = ERX.[X’/(X’ + Y’)] + ERY.[Y’/(X’ + Y’)] =  
= 0.781 x 10-3.[0.512 x 104/(0.512 x 104 + 0.123 x 102)] + 0. [0.123 x 102/(0.512 x 104 +  
+ 0.123 x 102)] = 0.781 x 10-3.[0.512 x 104/(0.512 x 104 + 0.123 x 102)] = **0.779 x 10-1**.

b) EAX.Z = EAX + EAZ = 0.4000 x 101 - 0,3 = 0.4000 x 101 – 0.03 x 101 = 0.37 x 101.  
ERX.Z = EAX + EAZ = 0.4000 x 101 - 0,3 = 0.4000 x 101 – 0.03 x 101 = 0.37 x 101.

c) EA2X = 2.EAX = **0.8000 x 101** e ER2X = 2.ERX = 2. 0.781 x 10-3 = **0.156 x 10-2.**

**EXERCÍCIOS**1. Converta os seguintes números decimais para a base binária.   
a) 125 b) 896 c) 1627 d) 0.568 e) 0.2213

2. Converta os seguintes números binários para a forma decimal.   
a) 11100101 b) 101011110 c) 0.100111 d) 0.00111011

3. Sejam X = 234.167 x 104, Y = 0.23155 x 10-5, Z = 0.231495 x 1012.  
Considerando um sistema aritmético de ponto flutuante de 4 dígitos,  
a) escreva os números nesse sistema considerando que a máquina adota o processo de truncamento.  
b) escreva os números nesse sistema considerando que a máquina adota o processo de arredondamento.  
c) Calcule os erros absolutos e relativos quando os números são guardados na memória da máquina que usa o processo de truncamento.  
d) Calcule os erros absolutos e relativos quando os números são guardados na memória da máquina que usa o processo de arredondamento.

4. Uma máquina cujo sistema de representação de números é definida por:  
Base = 10, t = 3 (número de dígitos da mantissa), [-6, 6] intervalo de variação do expoente da base.  
a) Qual é o maior número representado nessa máquina?  
b) Qual é o menor número positivo representado nessa máquina?  
c) Qual é o maior número negativo representado nessa máquina?  
d) Qual é o maior número negativo representado nessa máquina?

c) Se X = 6452 e Y = 33, que resultado a máquina fornecerá para X + Y? e para X.Y?

5. Calcule os erros absoluto e relativo ocorrido quando uma máquina que utiliza um sistema aritmético de ponto flutuante de 4 dígitos ao registrar o número X = 0.654987 x 105, se  
a) o processo usado for o de truncamento;  
b) o processo usado for o de arredondamento.

6. Calcule o erro nas operações abaixo em uma máquina que utiliza o processo de truncamento num sistema aritmético de ponto flutuante com 4 dígitos, considerando X = 0.65498 x 104 e Y = 0.12345 x 104. (usando os cálculos e usando as fórmulas)  
a) X + Y b) X . Y

7. Resolva o item anterior considerando um sistema que utiliza o processo de arredondamento. (usando os cálculos e usando as fórmulas)

8. Faça uma previsão dos módulos do erro relativo e do erro absoluto considerando uma máquina que utiliza o processo de truncamento num sistema aritmético de ponto flutuante com 4 dígitos, ao registrar os números X = 0.65498 x 104 e Y = 0.12345 x 108.

**CAPÍTULO 2 – ZEROS DE FUNÇÕES REAIS**

**2.1 – INTRODUÇÃO**

Consideremos inicialmente o problema: “determinar um número que somado ao seu quadrado é igual a 12”.  
A solução desse problema envolve uma equação do tipo x + x2 = 12, cuja resolução leva à determinação de tal número.  
Equações como a acima são de fácil solução pois, após um árduo trabalho, matemáticos já descobriram uma fórmula para resolve-la.  
Entretanto, equações como x6 + 2x – 1 = 0, não é possível resolver (ainda não foi descoberta uma fórmula) por meio de fórmula.  
Neste capítulo estudaremos processos que permitem resolver equações de qualquer tipo a partir de aproximações.

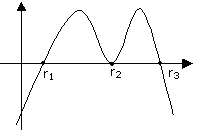
**2.2 – RAÍZES OU ZEROS DE UMA FUNÇÃO REAL**

Seja f(x) = 0 uma função com coeficientes reais, domínio R ou parte de R e contradomínio R ou parte de R. Tais funções são denominadas funções reais.  
Exemplo 1: f(x) = 6√x + ln x2 é uma função real; f(x) = 3iz2 + 4z + 2i com i = √-1 não é função real.

**Definição 1** – Dizemos que r é raiz ou zero da equação f(x) = 0 se f(r) = 0.

Exemplo 2: Seja a função f(x) = x2 – 3x + 2.  
2 é raiz ou zero de f(x) pois f(2) = 22 – 3.2 + 2 = 0.  
5 não é raiz ou zero de f(x) pois f(5) = 52 – 3.5 + 2 = 12 ≠ 0.

Na análise gráfica de f(x), o zero ou raiz de f(x) equivale à abscissa r do ponto onde o gráfico de f(x) corta ou tangencia o eixo horizontal.



No gráfico ao lado r1, r2 e r3 são raízes ou zeros de f(x).

**2.3 – DETERMINAÇÃO DE RAÍZES REAIS**

  A determinação de raízes reais por meio de transformações algébricas ou fórmulas é assunto já estudado. Iremos estudar métodos que permitem determinar, por aproximações, as raízes reais de uma equação.  
Todo procedimento para a determinação das raízes é constituído de duas fases:  
 **1ª fase**: - localização ou isolamento das raízes. Nesta fase procura-se obter um intervalo que contenha a raiz. Usa-se um intervalo para cada raiz.

**2ª fase:** - Refinamento. Nesta fase escolhida uma aproximação inicial no intervalo estabelecido na fase 1, melhorar a aproximação por processo iterativo (usando a aproximação anterior) até que se obtenha uma raiz dentro da aproximação ou precisão prefixada.

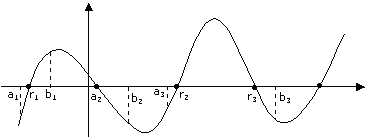
**2.4 – ISOLAMENTO DAS RAÍZES**

  Uma propriedade que pode ser usada para a localização de intervalos que contém a raiz consiste em:   
**“se f(x) é uma função contínua no intervalo [a, b] e   f(a).f(b) < 0 então existe pelo menos um valor r entre a e b que é zero de f(x)”.**

A propriedade acima afirma que f(a).f(b) < 0 existirá obrigatoriamente uma raiz no intervalo [a, b].  
É evidente que se f(a).f(b) = 0, pelo menos um dos fatores f(a) e f(b) será uma raiz de f(x).

Entretanto, se f(a).f(b) > 0 não é garantida a não existência de raízes no intervalo [a, b].

Usando as informações acima e observando o gráfico temos:  
(1) Intervalo [a1, b1], f(a1) < 0 e f(b1) > 0 ⇒ f(a1).f(b1) < 0 ⇒ existe pelo menos uma raiz no intervalo [a1, b1].  
No intervalo r1 é a única raiz no intervalo [a1, b1].  
(2) Intervalo [a2, b2], f(a2) = 0 e f(b2) < 0 ⇒ f(a2).f(b2) = 0. Neste caso a2 ou b2 é raiz. Como pode ser notado a2 é raiz de f(x).  
(3) Intervalo [a3, b3], f(a1) < 0 e f(b1) < 0 ⇒ f(a1).f(b1) > 0. Apesar do produto ser positivo existem duas raízes no intervalo, r2 e r3.  
(4) Intervalo [b2, a3], f(b2) < 0 e f(a3) < 0 ⇒ f(a3).f(b3) > 0 e no intervalo não existem raízes de f(x).



A derivada da função é muito útil para reconhecer se no intervalo [a, b], tal que f(a).f(b) < 0, existe mais de uma raiz. Se no intervalo a função é crescente temos f’(x) > 0 e se a função for decrescente f’(x) < 0. Se o sinal da derivada não modificar no intervalo, então nesse intervalo existe uma e somente uma raiz ou zero.

Para obter intervalos onde se localizam as raízes podemos:   
  
**(1)** construir uma tabela com valores atribuídos a x e calcular os valores correspondentes de f(x).  
Exemplos: f(x) = x3 – 8x + 6   
Calculando f(x) para alguns valores de x temos:

zeros1_3

A tabela foi construída no EXCEL (ou STARCAL) da seguinte forma:  
Nas células superiores, digamos C2, D2, ..., M2, foram digitados valores para x. Na célula C3, foi inserida a fórmula f(x) = x3 - 8x + 6, digitando = C2^3 - 8\*C2 + 6 e a seguir pressionado a tecla ENTER.   
Selecionando a célula C3, a fórmula foi copiada para as células D3, E3, ..., M3.  
Na célula C4 foi digitado = SE(C3<0;"-";"+") para serem exibidos os sinais de f(x). A seguir, a fórmula de C4 foi copiada para as células D4, E4, ..., M4.  
Observando a tabela verifica-se que ocorre mudança de sinal nos intervalos [-4, -3], [0, 1] e [2, 3]. Como a função é polinomial do terceiro grau, teremos apenas 1 raiz em cada um dos intervalo.

Vejamos agora a função f(x) = 50x3 – 65x2 + 26x – 3.  
A tabela:

Observa-se na tabela apenas uma mudança de sinal no intervalo [0, 1]. Pode-se esperar que exista 1, ou 2 ou 3 raízes nesse intervalo.

zeros1_4

Devido à incerteza, vamos analisar os intervalos onde a função é estritamente crescente ou decrescente. Para isso, podemos derivar a função e fazer uma análise da mesma.   
Neste caso teremos: f’(x) = 150x2 – 130x + 26.   
Estudando a variação do sinal de f'(x): Δ = 1302 – 4.150.26 = 1300 ⇒  
⇒ x1 ≅ (130 + 36,05)/300 = 0,554 e x2 = (130 - 36,05)/300 = 0,31.  
Como, na derivada a > 0, teremos f’(x) > 0 (função crescente) para x < 0,31 ou x > 0,554 e  
f’(x) < 0 (decrescente) para 0,31 < x < 0,554.

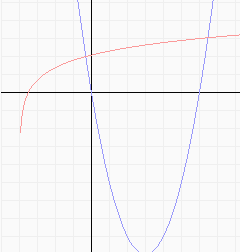
Vamos completar a tabela com os valores de x e f(x) para 0,31 e 0,554. Temos que: f(0,31) = 0,303 e f(0,554) = - 0,044. (Se você estiver usando o Excel ou o Starcalc, Você pode inserir as duas colunas e completar a tabela). Inserindo dos valores acima na tabela, teremos:

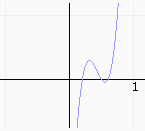
Da nova tabela pode-se concluir que existe uma raiz em cada um dos intervalos [0, 031],   
[0,31; 0,554] e [0,554; 1].

zeros1_5

**(2)** Construir o gráfico da função. Este processo permite localizar mais rapidamente os intervalos que contém as raízes.   
              A construção manual de um esboço de gráfico exige o conhecimento de domínio da função, pontos de descontinuidade, intervalos de crescimento e decrescimento, assíntotas, pontos de máximo absoluto, mínimo absoluto e pontos de inflexão. O uso de software facilita a construção e análise dos gráficos.   
Você pode usar um construtor gráfico disponível neste site, menu EDUCATIVO, opção Construtor gráfico.  
 Para a função f(x) = 50x3 – 65x2 + 26x – 3, teremos o gráfico abaixo, construído no construtor gráfico:

No gráfico, para o intervalo [0, 1] temos três valores de x onde o gráfico corta o eixo horizontal. Portanto, no intervalo [0, 1] existem três raízes.  
**(3)** Modificação da função. Uma equação do tipo f(x) = 0 pode ser escrita na forma f(x) = g(x) - h(x) = 0.   
Em conseqüência teremos g(x) = h(x).   
Construindo os gráficos de g(x) e h(x) em um mesmo sistema de eixos, as interseções dos dois gráficos fornecem as raízes de f(x).   
Seja, por exemplo: f(x) = x2 –6x - ln (2x + 8). Fazendo g(x) = x2 – 6x (em azul) e –h(x) = -ln(2x + 8) ⇔ h(x) = ln(2x + 8) (em vermelho).





A figura abaixo mostra os gráficos de g(x) e h(x):

Analisando o gráfico observa-se que as curvas se interceptam nos intervalos [-1, 0] e [6, 7]. Existindo, portanto, uma raiz em cada um dos intervalos.

**2.5 – REFINAMENTO**

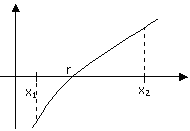
Existem vários métodos de refinamento de raízes onde se torna possível determinar um valor aproximado para a ou as raízes de uma equação. Em todos eles instruções são executadas passo a passo tendo como base o resultado anterior (processos iterativos). O processo deve ser continuado até que se atinja um resultado próximo ao esperado ou cujo erro seja inferior a um valor conhecido.   
 Seja uma função f(x) com uma raiz r no intervalo [a, b].   
Uma raiz r’ é dita aproximada com a precisão ε, se  
(1) |r’ – r| < ε, ou  
(2) r’ ∈ [a, b] e b – a < ε.  
No primeiro caso, a raiz exata deve ser conhecida, o que geralmente não acontece.  
Para o segundo caso, r´ pode ser qualquer valor pertencente ao intervalo.  
Nos itens a seguir veremos três processos para o refinamento das raízes.

**2.6 - MÉTODO DA BISSECÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES**

O princípio fundamental do método da bissecção consiste em localizar a raiz em um intervalo [x1, x2], onde a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente, e considerar a raiz aproximada como o ponto médio desse intervalo, ou seja, a raiz será (x1 + x2)/2. Para que a raiz pertença a tal intervalo, nas condições citadas, devemos ter f(x1). f(x2) < 0. Nesta consideração o erro cometido será menor ou igual à metade da amplitude do intervalo [x1, x2].

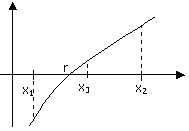
Isto é: erro = ε < |x2 - x1|. Veja figura abaixo.

€€€Para tornar o erro menor, pode-se dividir o intervalo em dois intervalos de amplitude igual à metade da amplitude do intervalo anterior. Para isso, tomemos x3 = (x1 + x2)/2.



A raiz estará no intervalo [x1, (x1+x2)/2] se f(x1).f((x1+x2)/2) < 0, caso contrário ela estará no intervalo [(x1+x2)/2, x2]. Veja figura a seguir. €€ €€€€€€€€€€€€

€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€€   
A repetição do processo fará com que, a cada iteração o ponto médio do intervalo se aproxime cada vez mais da raiz. Assim, o processo deverá ser continuado até que se obtenha uma aproximação com erro inferior ao solicitado.

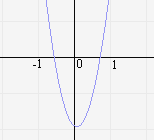


Como o processo é iterativo (repetições de cálculos) podemos usar o Excel ou StarCalc para facilitar os cálculo. Você pode também criar um aplicativo no Pascal ou outra linguagem para resolver equações por este processo.

Vejamos isto na prática.

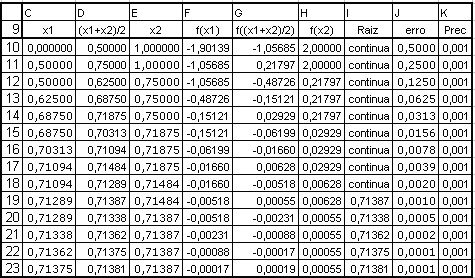
Seja, por exemplo, resolver a equação: f(x) = 5x2 + ln |2x – 3| - 3 com erro menor ou igual a 0,001.  
  
1 - Inicialmente, por processo gráfico, localizemos as raízes.  
Vamos usar o aplicativo Construtor Gráfico, que se encontra neste site, menu EDUCATIVO.   
Aberta a janela do aplicativo  
  
Vamos resolver a equação 5x2 + ln|2x - 3| - 3 = 0.   
Digite no campo f:  5\*x^2 + ln|2\*x – 3| -3 e a seguir marca-se a opção PLOT.  
Isto fornecerá o gráfico abaixo.

Observando o gráfico, nota-se que existem duas raízes: uma no intervalo [-1, 0] e outra no intervalo [0, 1].  
Vamos obter uma aproximação para a raiz pertencente ao intervalo [0, 1].  
  
2 - Abra o  Excel ou no StarCalc e siga as instruções abaixo:  
  
2.1 – Identificando as colunas: – usaremos as células indicadas na figura abaixo como referência





2.2 – Especificando os conteúdos das células:   
**C10** – digite o limite inferior do intervalo (no caso, 0)  
**D10** – ponto médio do intervalo. Digite **= (C10 + E10)/2** e pressione **ENTER.** Lembre-se que para exibir as referências às células você pode clicar na célula.   
**E10** – digite o limite superior do intervalo (no caso, 1)  
**F10** – valor de f(x1). Digite, **= 5\*C10^2 + ln(ABS(2\*C10 – 3)) – 3** e pressione **ENTER**. A função ABS calculará o valor absoluto de 3x – 2.   
**G10** e **H10** – Copie a fórmula da célula F10.  
**I10** – Digite: **=SE(J10>=K10;"continua";D10)**. Esta coluna indicará até onde deve ser dado continuidade ao processo. O primeiro número após o texto "continua" será a raiz com erro menor ou igual à precisão solicitada, que no caso é 0,001.   
**J10** - Digite: **=ABS(ABS(C10)-ABS(D10))**. Nesta coluna você irá obter a amplitude do intervalo. Como estamos usando o ponto médio do intervalo o erro máximo cometido será a metade da amplitude do intervalo [xi, xi+1].   
**K10** - Digite o valor da precisão indicada no enunciado. No caso, digite 0,001.   
**C11** – Digite: **=SE(F10\*G10<0;C10;D10)**.   
**D11** – Digite: Copie a fórmula da célula D10.  
**E11** – Digite: **=SE(F10\*G10<0;D10;E10).**As fórmulas da células C11 e E11, fará com que sejam escolhidos os limites inferior e superior do novo intervalo.  
**F11**, **G11**, **H11**: Copie as fórmulas das células F10, G10, H10, I10 para as células F11, G11, H11, I11.  
**J11** - Digite: = J10/2  
**K11** - digite: = K10.   
Copie as fórmulas das células C11 a k11 para as células inferiores. Selecione todas as células e arraste para as células inferiores.  
  
3. CONCLUINDO:



Veja como ficam os valores calculados ao usar o EXCEL

Na célula 19 temos a raiz aproximada da equação com erro inferior a 0,001. 

**Note que: “o número de algarismos após a vírgula deve se igual ao número de algarismos após a vírgula exibido na previsão do erro (0,001).** “

Desta forma, a raiz da equação resolvida é **0,713** se usado o processo de **truncamento** ou **0,714** se usado o processo de **arredondamento.**

O mesmo algoritmo pode ser usado para obter a aproximação da raiz no intervalo [-1, 0]. Neste caso basta substituir os valores 0 e 1 das células C10 e E10 por –1 e 0, respectivamente.  
Se você deseja manter a tabela usada para o cálculo da primeira raiz, para obter a segunda raiz, selecione todas as células. Pressione CTRL + C para copiar o conteúdo selecionado para a área de transferência.   
Clique na célula C26 (ou outra abaixo na mesma coluna) e pressione CTRL + V para colar o conteúdo nas células a partir de C26.

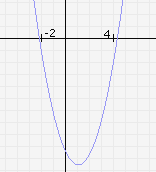
Ao resolver outras equações, basta substituir os limites do intervalo inicial exibidos nas células C10 e E10.   
Na célula F10 digite a fórmula para cálculo da função. Na célula K10 digite a precisão desejada.

**2.7 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA DETERMINAÇÃO DE RAÍZES**

Seja f(x) uma função cujas raízes devem ser determinadas com uma precisão menor ou igual a certo valor ε dado.   
O processo consiste em usar como raiz aproximada a raiz da equação da tangente à curva f(x), ou seja, a interseção da tangente com o eixo horizontal.   
Como se sabe, a equação da tangente à curva f(x) no ponto (x0, y0 ), onde y0 = f(x0) é:   
                                            **y – f(x0) = f’(x0).(x – x0).**   
Se a interseção da tangente intercepta o eixo horizontal no ponto de abscissa x = x1, teremos y = f(x1) = 0.

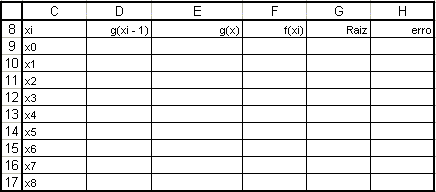
Substituindo os valores (x1, 0) na equação da tangente 0 – f(x0) = f’(x0).(x1 – x0) ⇒   
⇒ -f(x0) = f’(x0).x1 – f’(x0).x0 ⇒ f’(x0).x1 = f’(x0).x0 - f(x0).   
Dividindo todos os termos por f’(x0) resulta:  x1 = x0 - f(x0)/f’(x0)   
Como cada raiz é função da raiz anterior podemos escrever a equação acima sob forma de uma função que pode ser indicada na forma **g(x) = x – f(x)/f’(x).**   
  
Algebricamente, o processo consiste em:   
(1º passo) definir a função g(x) = x – f(x)/f’(x).  
(2º passo) escolhe-se um valor qualquer x0 para x.  
(3º passo) calcula-se a raiz x1, fazendo x1 = g(x0).  
Se |x0 - x1| < ε, então x1 é uma raiz aproximada de f(x), o que finaliza o processo pois já foi encontrada a raiz com a aproximação desejada.  
Caso contrário, continua o processo fazendo x2 = g(x1) e assim se prossegue até xn = g(n – 1) quando |xn - xn-1| < ε.  
  
Vejamos como construir um algoritmo no Excel ou Starcalc para determinar uma aproximação para cada raiz de uma equação.  
Tomemos por exemplo a função **f(x) = x2 – 2,15x – 9,37**, da qual se pretende determinar os zeros com aproximação inferior a **0,001**.  
A **derivada** de f(x) e f’(x) = 2x – 2,15.

1º passo: determinando a função g(x) = x – f(x)/f’(x).  
Temos então: g(x) = x – (x2 – 2,15x – 9,37)/(2x – 2,15).

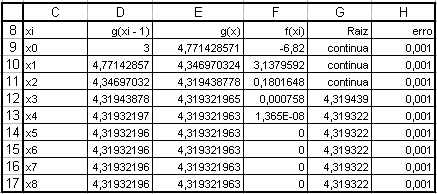


2º passo: localizar as raízes através de um gráfico. Usando o construtor gráfico do site MEU MUNDO obtém-se um gráfico como o ao lado.

Observando o gráfico verifica-se a existência de duas raízes x1 próxima de –2 e x2 próxima de 4.   
Determinemos inicialmente a raiz **x2**.  
3º passo: vamos escolher um valor qualquer (x0) que esteja mais próximo de x2 que de x1.  
**Nota:** Se o número escolhido estiver mais próximo de x1 que de x2, será obtida a raiz x2.  
Tomemos por exemplo x0 = 3.  
Usando o Excel ou o Starcalc (observação: as células indicadas no algoritmo abaixo servirão para referências. Você pode usar qualquer outro conjunto de células).Lembre-se que ao usar uma fórmula, não há necessidade de digitar a identificação da célula, basta clicar sobre a mesma que automaticamente a célula será exibida na fórmula.  
4º passo: Identificando os elementos envolvidos  
Veja as indicações:



5º passo: Formatando as células:  
Célula D9 – digite o valor atribuído a x0. Conforme indicado no 3º passo, digite 3.  
Célula E9 – digite a fórmula = D9 - (F9)/(2\*D9-2,15). Você estará calculando g(3).  
Célula F9 – digite a fórmula =D9^2 - 2,15\*D9-9,37. Você estará calculando f(3).  
Célula G9 – digite a fórmula =SE(ABS(E9-D9)>H9;"continua";E9). Você estará indicando a raiz quando a mesma satisfizer a condição erro < ε, que no caso ε = 0,001.  
Célula H9 – digite o valor do limite do erro, ou seja, o valor de ε que é 0,001.  
Célula D10 – digite a fórmula = E9. Você copiará o valor de g(xi – 1) considerado como a próxima raiz.  
Célula H10 – digite a fórmula = H9. Você copiará o valor do erro para a próxima célula.  
A vantagem de se copiar o valor da célula H9 é que bastará substituir o valor do erro desejado na célula H9 que o mesmo será exibido nas demais células da coluna H.  
Selecione as células  E9, F9 e G9 e copie as fórmulas para as células E10, F10 e G10, respectivamente.  
Selecione agora as células D10, E10, F10, G10 e H10 e copie as formulas para as células para as linhas 11 a 17.  
Concluindo: o primeiro valor exibido na coluna G, após o último “continua” é a raiz aproximada com erro inferior a ε.  
Veja como ficou o algoritmo.



**IMPORTANTE:** na raiz deve-se considerar a mesma quantidade de algarismos após a vírgula que os apresentados no limite ε do erro aceitável. Você pode usar o processo de arredondamento ou de truncamento.

Concluindo: uma das raízes da equação f(x) = x2 – 2,15x – 9,37 com erro inferior a 0,001 é 4,319, resultado este obtido na célula G12.

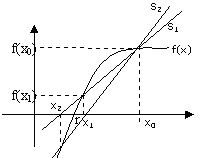
Vamos calcular agora a outra raiz (x1).   
Selecione as células de C8 a H17. Copie as células (use Ctrl + C) e, clicando na célula C20 cole o conteúdo copiado (use Ctrl + V).   
Substitua o conteúdo da célula D9 por um valor próximo da outra raiz x1. Substitua, por exemplo, o número 3 exibido na célula D9 por 0.  
Você verá que na célula G23 será exibido o valor dessa outra raiz, ou seja x1 = -2,169.

**ATENÇÃO: você pode usar este mesmo algoritmo para calcular as raízes que qualquer equação. Basta substituir os conteúdos das células D9, E9, F9, G9 e H9.**

**2.8 - MÉTODO DA SECANTE**

Este processo para determinação de aproximações das raízes de uma equação é semelhante ao método de Newton-Raphson. Nele, a equação da tangente é substituída pela equação da secante que corta a curva da função em dois pontos cujas abscissas definem um intervalo onde está contida a raiz.

Tomemos, por exemplo, o gráfico abaixo:



No gráfico, r é a raiz de f(x). Tomemos os pontos de abscissas x = x0 e x = x1 e tracemos a secante S1.   
A equação da secante que passa pelos pontos (x0, f(x0)) e (x1, f(x1)) é

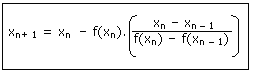
metsec_1d

Podemos considerar como primeira aproximação para a raiz de f(x) o valor x2 que corresponde à abscissa do ponto onde a secante corta o eixo horizontal. Para este ponto x = x2 e y = 0.   
Substituindo os valores na equação da secante, resulta:

metsec_1e

Por x2 e x1 tracemos a secante S2. A interseção da secante com o eixo horizontal, cuja abscissa é x = x3, é a segunda aproximação para a raiz de f(x).   
Conforme deduzido acima,

metsec_1f



Continuando o processo, a aproximação de ordem n será:

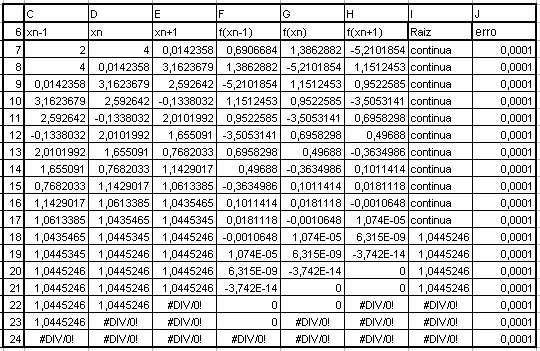
O processo deve continuar até que |xn + 1 – xn| < ε.   
Vamos usar o Excel ou StarCalc para criar um algoritmo que permite determinar tais raízes.

Tomemos por exemplo a equação ln x – e-3x = 0 com erro inferior a 0,0001.   
**Passo 1** – Usando o construtor gráfico do site MEU MUNDO, construa o gráfico da função lnx – e-3x.   
No construtor gráfico digite ln x – e^(-3\*x) e localize a ou as raízes de modo a poder tomar dois pontos para determinação da equação da secante.  
Um cuidado a ser tomado na escolha dos pontos para se obter a primeira secante. Seja, por exemplo, uma equação cujas raízes são r1  e r2, tais que r1 < r2. Na determinação da raiz r2, ao escolher as abscissas x0 e x1 para o traçado da secante, deve-se fazê-lo de modo que a secante intercepte o eixo horizontal em um ponto x2 tal que x2 > r1. Para determinação de r1, a escolha de x0 e x1 deve ser tal que a secante corte o eixo horizontal em um ponto de abscissa x2 tal que x2 < r2. Este procedimento evita a divergência do processo.   
  
**Passo 2** – Identificação das colunas.   
Identifique as colunas conforme indicado na figura abaixo.

metsec_1a

**Passo 3** – Preenchimento das células.   
3.1 - **Células C7 e D7** preencha-as com quaisquer valores para x no intervalo de definição da função. Digamos 2 e 4, respectivamente.   
3.2 - **Célula E7** – digite **=D7-G7\*(D7-C7)/(G7-F7)**. Você estará calculando a aproximação xn+1 para a raiz.   
3.3 - **Célula F7** – digite **=LN(ABS(C7)) - EXP(-3\*C7)**. Você estará calculando o valor de f(x), onde x é o conteúdo da célula C7.   
3.4 - **Célula G7 e H7**. Copie para estas células a fórmula da célula F7.   
3.5 - **Célula I7** – digite **=SE(ABS(E7-D7)>=J7;"continua";E7)**. Na coluna I, você estará selecionando a aproximação para a raiz com a previsão de erro.   
A raiz será o primeiro número após a indicação continua.   
3.6 - **Célula J7** – digite o valor da estimativa para o erro.   
3.7 - **Célula C8** – digite **=D7** para copiar o valor xn.   
3.8 - **Célula D8** – digite **=E7** para copiar o valor de xn + 1.   
Selecione as células **F7, G7, H7, I7** e copie as fórmulas para as células **F8, G8, H8, I8.**   
3.9 - **Célula J8** – digite =J7 para copiar o valor do erro.   
3.10 - **Selecione** as células C8 até J8. Copie as fórmulas paras as células abaixo até a linha 24.

Veja como ficou a tabela:



A raiz da equação é então 1,0445 com erro inferior a 0,0001.   
Note que o número de dígitos após a vírgula deverá ser igual ao número de dígitos após a vírgula apresentados no erro.

**EXERCÍCIOS**

1. Localize os menores intervalos [a, b], a e b inteiros, onde estão localizadas as raízes das equações:   
a) e2x – x2 = 0 b) x4 - 3x + 1 = 0 c) 5.ln(x2 - 1) + √x = 0.  
d) 5- x.ln(x + 3) = 0. e) 42x - x2 = 0 f) 3.sen (4x - 1) + 2x = 0.

2. Resolva as equações acima usando cada um dos três métodos, com precisão de 0,001. Para cada equação, qual método utiliza menor número de interações?

3. A solução da equação x5 – 20 = 0 é x = 201/5.  
Calcule então a raiz quinta de 20, com precisão de 0,001.

4. A solução da equação sen x - 1 = 0 no intervalo [0, π] é x = π/2.  
Calcule o valor de π com 6 casas decimais.

5 - Resolva as equações abaixo, com erro inferior a 0,0001, utilizando os processos   
I) bissecção   
II) Newton-Raphson (quando a derivada for simples de ser obtida).   
III) secante.   
Para cada uma dê o número de iterações e informe qual foi o método mais rápido.   
(1) 0,658x5 – 8,68x4 + 41,63x3 – 88,09x2 + 79,35x –23,33 = 0.   
(2) ex – x2 + 3x – 2 = 0.   
(3) (x – 2)2 – ln|x| = 0   
(4) x2 – 2xe-x + e-2x = 0.   
(5) cos (x + √2) + x.(x + 2√2)/2 = 0   
(6) x3 – 3x2.(2-x) + 3x.(4-x) + 8-x = 0   
(7) e6x + 3.(ln2).e2x – (ln 8).e4x – (ln 2)3 = 0.

6 – Determine os intervalos que contenham as raízes das equações, com amplitude 0,5.   
a) x.cosx – 2x2 + 3x – 1 = 0.   
b) (x – 2)2 – ln x = 0   
c) 2xcos(2x) – (x – 2)2 = 0.   
d) x – (ln x)2 = 0.   
e) x – 3-x = 0.   
f) 4x2 – ex = 0.   
g) x3 + 4,001x2 + 4,002x + 1,101 = 0.

7 – Os métodos de iteração (bissecção, Newton-Raphson, secante e outros) podem ser usados para calcular valores numéricos. Por exemplo: para calcular o valor aproximado de 12/7, escrevemos a equação x – 12/7 = 0. O valor aproximado de x (raiz) é o valor aproximado de 12/7.   
Calcule, com erro inferior a 0,00001 então, o valor de:   
a) 12/7;   
b) cos π/6   
c) raiz cúbica de 1041.   
d) 160/11   
e) ln 1612.

**CAPÍTULO 3 - RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES**

**3.1 – PRELIMINARES**

Podemos considerar os métodos para resolução de sistemas lineares como agrupados em:

(i) **métodos diretos** onde, considerados os erros de arredondamento ou truncamento, é fornecida a solução exata do sistema a partir de um número finito de operações;

(ii) **métodos iterativos**, onde é gerada uma seqüência de vetores coluna (soluções) a partir de uma aproximação inicial x0.

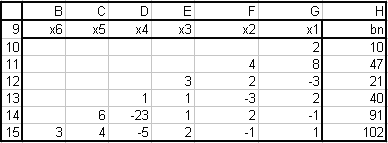
No primeiro e segundo grau, bem como na disciplina Álgebra Linear, foram discutidos métodos diretos para resolução de sistemas lineares.   
Entre estes métodos, encontram-se:  
**(1)** Regra de Cramer onde xi = det(Mi)/det(M) onde M é a matriz formada pelos coeficientes das variáveis e Mi é a matriz obtida ao substituir a coluna correspondente aos coeficientes da variável xi pelos termos independentes.  
**(2)** Inversão de matrizes, método este que consiste em transformar o sistema na equação matricial A.X = B, onde A é a matriz formada pelos coeficientes das variáveis, B é a matriz (vetor coluna) formada pelos termos independentes. Na solução faz-se X = A-1.B.  
**(3)** Escalonamento de matrizes, que consiste em transformar a matriz dos coeficientes em uma matriz triangular (aij = 0 quando i > j).  
 Como métodos iterativos, podemos citar os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, que serão discutidos neste capítulo.

**3.2 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES TRIANGULARES**

Seja um sistema linear de variáveis x1, x2, x3, ...xn sendo aij o coeficiente da variável xj na equação i.  
Um sistema, assim definido, é dito sistema linear triângulo se para todo aij com i < j, tem-se aij = 0. Veja abaixo um sistema triangular genérico.  
 a11x1 + a12x2 + a13x3 + .... + a1,n-1xn-1 + a1nxn = b1 a22x2 + a23x3 + .... + a2,n-1xn-1 + a2nxn = b2  a33x3 + .... + a3,n-1xn-1 + a3nxn = b3 ..........................................................................   
 an-1,n-1xn-1 + an-1,nxn = bn-1 annxn = bn

O sistema triangular é de fácil solução, pois basta calcular o valor da variável xn na última equação e, em seguida, substituir o valor encontrado na penúltima equação. Segue-se o processo usando os valores encontrados anteriormente para a equação anterior até chegar à primeira equação e aí obter o valor de x1.   
Isto é:  
Da última equação obtém-se: xn = bn/ann.  
Da penúltima equação an-1,n-1xn-1 + an-1,nxn = bn e usando o valor de xn, teremos  
xn – 1 = [bn-1 - an-1,n-1xn-1]/an-1,n-1.   
Sucessivamente se obtém xn – 2, ....x2, x1, onde x1 = [b1 – (a11x1 + a12x2 + a1,n-1xn-1 + a1nxn)]/a11.

Pode-se resolver o sistema manualmente, porém, como a solução admite uma seqüência lógica, podemos usar aplicativos para resolvê-lo. Vamos usar o Excel ou o StarCalc para isso. Veja a seqüência abaixo:  
Aberto um dos programas acima:  
(1) Construa uma tabela com os coeficientes das variáveis e os termos independentes conforme indicado na figura a seguir:



(2) Na célula J10 digite: =H10/G10 para calcular o valor da variável x1. Lembre-se que para exibir o valor da célula basta clicar na mesma.   
(3) Na célula J11 digite: =(K10-J10\*M9)/I10 para calcular o valor da variável x2.  
(4) Na célula J12 digite: =(K11 - M9\*J11-M10\*I11)/H11.  
(5) Na célula J13 digite: =(K12-M9\*J12-M10\*I12-M11\*H12)/G12.  
(6) Na célula J14 digite: =(K13-M9\*J13-M10\*I13-M11\*H13-M12\*G13)/D14.  
(7) Na célula J15 digite: =(K14-M9\*J14-M10\*I14-M11\*H14-M12\*G14-M13\*F14)/E14 para calcular o valor da variável x6.  
Os valores das raízes serão exibidas nas colunas J11, J12, J13, J14, J15.  
Você pode estender o procedimento para um valor maior de variáveis e usar o algoritmo para resolver qualquer sistema triangular, substituindo apenas os coeficientes das variáveis e os termos independentes.  
Se você criou um dispositivo para resolver um sistema com n equações, o mesmo pode ser usado para um número menor de equações. Neste caso, considere os coeficientes das variáveis não existentes por zero.

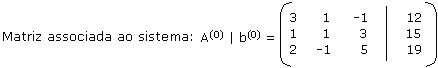
**3.3 – MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS (MÉTODO DIRETO)**

Quando o sistema não se apresenta na forma triangular utiliza-se o método de eliminação de Gauss para torná-lo triangular.   
Podem ser aplicadas as transformações, denominadas transformações lineares:  
(1) trocar as posições das equações:  
(2) multiplicar uma equação por um número real, não nulo.  
(3) somar uma equação com outra multiplicada por um número real.

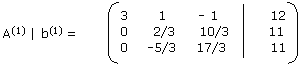
Usaremos os símbolo A(n) e aij(n)  para indicar a matriz A e o elemento aij após aplicada a n-ésima transformação. A matriz original e o elemento original serão indicados, respectivamente, por A(0) e aij(0).

Seja A(0)|b(0) a matriz ampliada do sistema. Isto é a matriz formada pelos coeficientes das variáveis à qual se acrescentam os termos independentes.   
Consideremos aij(0) ≠ 0. Caso não o seja, troca-se a ordem das equações de modo a tornar aij(0) ≠ 0  
Esse elemento é denominado **pivô.**Aconselha-se também escolher como pivô um elemento não próximo de zero pois isto pode levar a erros de aproximação.  
Para eliminar a variável x1 nas equações i = 2, 3, 4 ... n, da equação i subtrai-se a equação 1 multiplicada por mi1 = ai1(0)/a11(0).  
Zerando os elementos ai1, com i = 2, 3, 4, ...n, numa segunda fase, toma-se como pivô o elemento ai2(1) ≠ 0. Caso o mesmo seja nulo ou próximo de zero, troca a posição das linhas 2, 3, 4, ... n.   
Repete-se o procedimento, zerando os elementos ai2, i = 3, 4, 5, ... n.   
O processo é continuado até atingir a linha n.

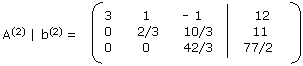
Exemplo: Seja, resolver o sistema:   
3x + y – z = 12   
 x + y + 3z = 15   
2x - y + 5z = 19.



Pivô: a11(0) = 3. Multiplicadores m21 = 1/3 m31= 2/3  
L2 – m21.L1 🡪 L2 (esta notação é usada para sustituir a linha 2 pelo resultado L2 - m21.L1)   
L3 – m31.L1 🡪 L3



Pivô a22(1) = 4/3. Multiplicado m32 = (-5/3)/(2/3) = -5/2.   
L3 – m32.L2 🡪 L3



Assim:   
(42/3)z = 77/4 ⇔ z = 11/4   
y = [11 – (10/3).(11/4)]/(2/3) ⇔ y = 11/4   
x = [12 –1.(11/4) – (-1).(11/4)]/3 ⇔ x = 4.   
Resposta: (4, 11/4, 11/4).  
  
Como deve ter sido notado, a escolha dos multiplicadores torna o processo dependente do sistema a ser resolvido.   
Para que a escolha não seja dependente do sistema a ser resolvido, podemos usar o seguinte procedimento:  
1º passo - multiplica-se cada equação pelo produto de todos coeficientes da primeira variável dividido pelo coeficiente dessa mesma variável exibido na respectiva equação.  
2º passo - substitui cada equação pela diferença dessa equação e a primeira equação.  
Deste modo, apenas o coeficiente da primeira variável na primeira equação será diferente de zero.  
  
3º passo - repete-se o primeiro passo para as equações à partir da segunda equação e igualando os coeficientes da segunda variável.  
4 passo - repete-se o segundo passo para as equações a partir da segunda equação.   
Em conseqüência, todos os coeficientes da segunda variável serão nulos, exceto na primeira e segunda equação.  
Repete-se então o processo até que o sistema se torne um sistema triangular.  
  
Pode-se criar um algoritmo no Excel ou no StarCalc, para n variáveis. Entretanto, o algoritmo somente poderá ser usado para sistemas com um número de variáveis menor ou igual a n.  
Veja abaixo como criar o dispositivo para sistemas de até 8 equações.

Digite os valores dos coeficientes e termos independentes nas células A1 e seguintes, conforme figura abaixo.   
(1) Em A10 digite =A1   
(2) Em A11 digite =SE(($A$2)=0;A2;A2 - A1\*$A$2/$A$1). Esta fórmula irá zerar o coeficiente da primeira variável na segunda equação. Se este coeficiente já for igual a zero, os coeficientes da equação serão mantidos.   
(3) Copie conteúdo da célula A11 para as células A12 até A17.   
O conteúdo da célula A12 deverá ser =SE(($A$3)=0;A3;A3 - A1\*$A$3/$A$1).   
Entretanto, ao copiar a fórmula, em A12 será exibido =SE(($A$2)=0;A3;A3 - A2\*$A$2/$A$1).   
Observe as diferenças entre a fórmula ao ser copiada e a que deveria ser exibida.   
Diferenças como esta serão apresentadas em todas as demais células da coluna A.   
Faça então as modificações necessárias, em cada célula da coluna A, usando para isso a barra de ferramentas no campo onde é exibida a fórmula.   
(4) Depois de feitas as modificações nas células A12 a A17, copie as fórmulas das células A10 a A17 para as células B10 a J17.   
Temos então os coeficientes da primeira variável iguais a zero com exceção do coeficiente dessa variável na primeira equação.   
Confira os conteúdos das células A12 a A17:   
A12: =SE(($A$3)=0;A3;A3 - A1\*$A$3/$A$1)   
A13: =SE(($A$4)=0;A4;A4 - A1\*$A$4/$A$1)   
A14: =SE(($A$5)=0;A5;A5 - A1\*$A$5/$A$1)   
A15: =SE(($A$6)=0;A6;A6 - A1\*$A$6/$A$1)   
A16: =SE(($A$7)=0;A7;A7 - A1\*$A$7/$A$1)   
A17: =SE(($A$8)=0;A8;A8 - A1\*$A$8/$A$1)   
Como os passos são semelhantes para zerar os coeficientes da primeira variável a partir da segunda equação, daremos apenas os conteúdos que devem figurar nas demais células da coluna A.   
Zerando os coeficientes da segunda variável a partir da terceira equação.   
A19: =A10   
A20: =A11   
A21: =SE(($B$12)=0;A12;A12-A11\*$B$12/$B$11)   
A22: =SE(($B$13)=0;A13;A13-A11\*$B$13/$B$11)   
A23: =SE(($B$14)=0;A14;A14-A11\*$B$14/$B$11)   
A24: =SE(($B$15)=0;A15;A15-A11\*$B$15/$B$11)   
A25: =SE(($B$16)=0;A16;A16-A11\*$B$16/$B$11)   
A26: =SE(($B$17)=0;A17;A17-A11\*$B$17/$B$11)   
Zerando os coeficientes da terceira variável a partir da quarta equação.   
A28: =A19   
A29: =A20   
A30: =A21   
A31: =SE(($C$22)=0;A22;A22-A21\*$C$22/$C$21)   
A32: =SE(($C$23)=0;A23;A23-A21\*$C$23/$C$21)   
A33: =SE(($C$24)=0;A24;A24-A21\*$C$24/$C$21)   
A34: =SE(($C$25)=0;A25;A25-A21\*$C$25/$C$21)   
A35: =SE(($C$26)=0;A26;A26-A21\*$C$26/$C$21)   
Zerando os coeficientes da quarta variável a partir da quinta equação.   
A37: =A28   
A38: =A29   
A39: =A30   
A40: =A31   
A41: =SE(($D$32=0);A32;A32-A31\*$D$32/$D$31)   
A42: =SE(($D$33=0);A33;A33-A31\*$D$33/$D$31)   
A43: =SE(($D$34=0);A34;A34-A31\*$D$34/$D$31)   
A44: =SE(($D$35=0);A35;A35-A31\*$D$35/$D$31)   
Zerando os coeficientes da quinta variável a partir da sexta equação.   
A46: =A37   
A47: =A38   
A48: =A39   
A49: =A40   
A50: =A41   
A51: =SE(($E$42)=0;A42;A42-A41\*$E$42/$E$41)   
A52: =SE(($E$43)=0;A43;A43-A41\*$E$43/$E$41)   
A53: =SE(($E$44)=0;A44;A44-A41\*$E$44/$E$41)   
Zerando os coeficientes da sexta variável a partir da sétima equação.   
A55: =A46   
A56: =A47   
A57: =A48   
A58: =A49   
A59: =A50   
A60: =A51   
A61: =SE(($F$52)=0;A52;A52-A51\*$F$52/$F$51)   
A62: =SE(($F$53)=0;A53;A53-A51\*$F$53/$F$51)   
Zerando os coeficientes da sétima variável na oitava equação.   
A64: =A55   
A65: =A56   
A66: =A57   
A67: =A58   
A68: =A59   
A69: =A60   
A70: =A61   
A71: =SE(($G$62)=0;A62;A62-A61\*$G$62/$G$61).

Para a solução do sistema teremos:   
L64: =(J64-L71\*H64-L70\*G64-L69\*F64-L68\*E64-L67\*D64-L66\*C64-L65\*B55)/A64   
L65: =(J65-L71\*H65-L70\*G65-L69\*F65-L68\*E65-L67\*D65-L66\*C65)/B65   
L66: =(J66-L71\*H66-L70\*G66-L69\*F66-L68\*E66-L67\*D66)/C66   
L67: =(J67-L71\*H67-L70\*G67-L69\*F67-L68\*E67)/D67   
L68: =(J68-L71\*H68-L70\*G68-L69\*F68)/E68   
L69: =(J69 - L71\*H69-L70\*G69)/F69   
L70: =(J70-H70\*L71)/G70   
L71: =J71/H71   
Nas células L64 a L71 serão exibidas as raízes do sistema.

**3.4 – MÉTODOS ITERATIVOS**

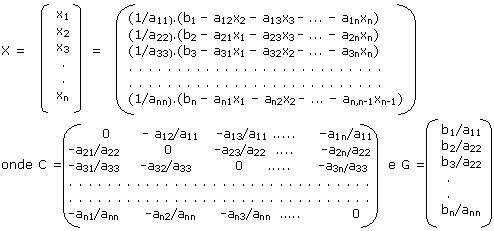
O princípio básico dos métodos iterativos consiste em converter um sistema AX = B, onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz coluna (vetor coluna) das variáveis e B a matriz coluna dos termos independentes em uma função matricial do tipo g(X) = C.X + G onde G é uma matriz de ordem n x 1.  
Partindo da primeira aproximação X(0) obtém-se sucessivamente as aproximações  
X(1) = G(X(0))= C.X(0) + G; X(2) = G(X(1)) = C.X(1) + G, … X(n + 1) = G(X(n)) = C.X(n – 1) + G.

sis_lin_4_1

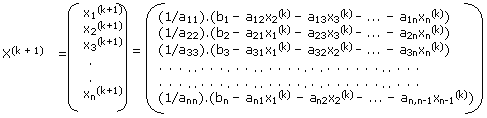
Quando se deseja uma dada precisão ε, a cada iteração calcula-se Δ(k) = max|xi(k) – xi(k-1)|.  
A solução aceita será aquela em que Δ(k) < ε (erro absoluto).  
Entretanto, deve-se fazer o teste do erro relativo Δr(k) = Δ(k)/(Max|xi(k)), considerando válida a aproximação quando: Δr(k) < ε.

**3.5 – MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI**

Seja o sistema  
 a11x1 + a12x2 + .... + a1nxn = b1 a21x1 + a22x2 + .... + a2nxn = b2 a31x1 + a32x2 + .... + a3nxn = b3 ...........................................   
 an1x1 + an2x2 + .... + annxn = bnonde aij ≠ 0, para todo i = j (elementos da diagonal principal não nulos).  
Caso algum aij = 0 para i = j, trocam-se as posições de algumas linhas de modo a torná-los não nulos.  
O vetor X é obtido isolando as variáveis x1, x2, ... xn, tomando-os da diagonal principal. Isto é:



Obtidas as matrizes e dado X(0), obtém-se sucessivamente X(1), X(2), ... X(k) usando a relação   
X(k + 1) = CX(k) + G, ou seja



**Na aplicação do método de iterativo de Gauss-Jacobi, é preciso observar o problema da convergência.   
Para garantir a convergência, o maior coeficiente de cada equação deve ser posicionado na diagonal principal. Isto se consegue com a troca de linhas ou de colunas, além disso, devemos ter, para toda linha i:   
ki < 1 onde ki = [(soma dos módulos dos elementos da linha i)-|aii|)]/|aii|.**  
  
Exemplo: Resolver, com precisão relativa 0,01, o sistema  
3x1 + x2 – x3 = 12  
 x1 + x2 + 3x3 = 15  
2x1  - x2  + 5x3 = 19.  
Consideremos como primeira aproximação X(0) = (1, 1, 1).  
Explicitando as variáveis para cada uma das equações:  
x1 = (1/3)(12 – x2 + x3)  
x2 = 1.(15 – x1 – 3x3)  
x3 = (1/5).(19 – 2x1 + x2)  
Deste modo a relação de iteração é:  
x1(k + 1) = (1/3).(12 – x2(k) + x3(k))   
x2(k + 1) = (1).(15 – x1(k) - 3x3(k))   
x3(k + 1) = (1/5).(19 – 2.x1(k) + x2(k)).   
X(0) = (1, 1, 1).   
1ª iteração:   
x1(1) = (1/3).(12 – x2(0) + x3(0)) = (1/3).(12 – 1 + 1) = 4  
x2(1) = (1).(15 – x1(0) - 3x3(0)) = (1).(15 – 1 – 3) = 11  
x3(1) = (1/5).(19 – 2.x1(0) + x2(0)). (1/5).(19 – 2 + 1) = 3,6  
⇒ X(1) = (x1(1), x2(1), x3(1)) = (4; 11; 3,6)  
Calculando Δr(1)  
Δ1(1)  = |x1(1) – x1(0)| = 4 – 1 = 3;  
Δ2(1) = |x2(1) – x2(0)| = 11 – 1 = 10;   
Δ3(1) =|x3(1) – x3(0)| = 3,6 – 1 = 2,6.  
Max Δi(1) = 10; Max xi(1) = 11 ⇒ Δr(1) = 10/11 = 0,909 > 0,01.

2ª iteração:  
x1(2) = (1/3).(12 – x2(1) + x3(1)) = (1/3).(12 – 11 + 3,6) = 1,5333  
x2(2) = (1).(15 – x1(1) - 3x3(1)) = (1).(15 – 4 – 3.3,6) = 0,2  
x3(2) = (1/5).(19 – 2.x1(1) + x2(1)). (1/5).(19 – 2.4 + 11) = 4,4  
⇒ X(2) = (x1(2), x2(2), x3(2)) = (1,5333; 0,2; 4,4)  
Calculando Δr(2)  
Δ1(2)  = |x1(2) – x1(1)| = |1,5333 – 4| = 2,4667;  
Δ2(2) = |x2(2) – x2(1)| = |0,2 – 11| = 10,8;   
Δ3(2) =|x3(2) – x3(1)| = |4,4 - 3,6| = 0,8  
Max Δi(2) = 10,8; Max xi(2) = 4,4 ⇒ Δr(1) = 10,8/4,6 = 2,34 > 0,01.  
O processo é continuado até 34 iterações.  
Na iteração 34 teremos X(34) = (4,023905; 2,717357; 2,731981) com Δr(34) = 0,008045.

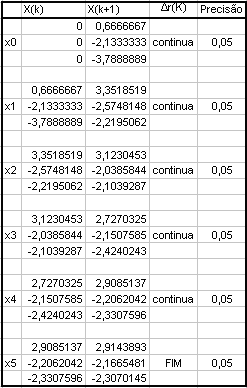
**3.6 – USANDO O EXCEL (OU STARCALC) PARA RESOLVER UM SISTEMA PELO MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI**   
Os passos abaixo mostram como resolver um sistema pelo método iterativo de Gauss-Jacobi.  
1) Nas células B7, B8, B9 digite a raiz X(0), ou seja, os valores escolhidos para xi(0), i = 1, 2, 3..  
2) Nas células C7, C8, C9 digite as fórmulas para calcular xi(1), i = 1, 2, 3.  
3) Na célula E7 digite a fórmula para calcular Δk = xk+1 - xk.  
4) Copie a fórmula para as células E8, E9.  
5) Na célula F(8) digite =ABS(MÁXIMO(E7:99)/MÁXIMO(C7:C9)).  
6) Na célula B11 digite =C7.  
7) Selecione a célula B11 e copie a fórmula para as Células B12 e B13.  
8) Selecione as células B11 a F13. Copie os conteúdos das células (CRTL + C).  
9) Clique na célula B15 e cole (CRTL + V) os conteúdos copiados.  
10) Torne a colar o conteúdo nas células B19 a B23, etc.  
Quando a razão da coluna F for menor que a precisão pedida, os valores exibidos nas três últimas células da coluna C serão as raízes aproximadas do sistema.

**3.7 - MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL**

O método de Gauss-Seidel diferencia do método de Gauss-Jacobi pois naquele são usadas as aproximações já calculada na interação k para determinar as aproximações das demais variáveis.  
Assim:

x1(k + 1) = (1/a11).(b1 – a12x2(k) – a13x3(k) – a14x4(k) - ...... - a1nxn(k))  
x2(k + 1) = (1/a22).(b2 – a21x1(k+1) – a23x3(k) – a14x4(k) - ...... - a2nxn(k) )x3(k + 1) = (1/a33).(b3 – a31x1(k+1) – a32x2(k) – a34x4(k) - ...... - a2nxn(k) )  
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  
xn(k + 1) = (1/a44).(bn – an1x1(k+1) – an2x2(k+1) – an3x4(k+1) - ...... – an,n-1xn-1(k+1))    
  
**A convergência no método Gauss-Siedel é garantida se observadas as condições:  
(1) Define o fator K, tal que   
            K1 = (|a12| +|a13|+ |a14| + ... + |a1n|)/a11  
         e Kj = (|aj1|.K1 + |aj2|.k2 + ...+ |ajj-1|Kj-1+ |ajj+1|Kj+1)/(ajj).  
Note que para kj não figura o produto |ajj|.kj(2) Se max Kj < 1, o método gera uma seqüência convergente, qualquer que seja a solução inicial escolhida.  
Obs: a troca de linhas no sistema e a verificação da convergência aplicada no método de Gauss-Jacobi pode ser aplicada no método de Gauss-Siedel.**

Exemplo: Resolver a equação com precisão 0,05.  
3x1 + 2x2 – x3 = 2  
2x1 – 5x2 + 2x3 = 12  
4x1 + 3x2 – 6x3 = 19  
A equação já está conforme para a aplicação pois os maiores coeficientes estão na diagonal principal.  
Considerando X(0) = (0, 0, 0).  
Explicitando x1 na primeira equação, x2 na segunda e x3 na terceira:  
x1 = (1/3).(2 – 2x2 + x3)  
x2 = (-1/5).(12 – 2x1 – 2x3)x3 = (-1/6).(19 – 4x1 – 3x2)Temos para as iterações  
x1(k+1) = (1/3).(2 – 2x2(k) + x3(k))   
x2(k+1) = (-1/5).(12 – 2x1(k+1) – 2x3(k))   
x3(k+1) = (-1/6).(19 – 4.x1(k+1) –3x2(k+1))   
Note que na segunda equação foi usado o valor encontrado para x1 na primeira equação e na terceira equação foram usados os valores encontrados para x1 e x2 na segunda equação.



Veja o algoritmo utilizado para resolver a equação acima.

Na quarta iteração (x5) temos Δr(4) < 0,05 (precisão exigida).  
Deste modo a solução aproximada do sistema é (1,6240705; -3,2077826; -3,6878443), que devem ser indicadas por (1,62; 3,21; -3,69) por arredondamento ou (1,62; 3,20; -3,68) por truncamento. As duas casas após a virgula acompanham o número de casas após a vírgula da precisão exigida.  
Os cálculos acima foram realizados no Excel por processo semelhante ao descrito anteriormente para o método de Gauss-Jacobi.   
Veja as fórmulas das células:  
(1) J5: digite o valor da precisão exigida.  
(2) J9, J13, J17, J21, J25 - copie a fórmula de J5 (Ctrl + C) e copie nas células citadas (Crtl + V).  
(3) I5: digite =SE(MÁXIMO(ABS(H4-G4);ABS(H5-G5);ABS(H6-G6))>=J5;"continua";"FIM").  
(4) Copie o conteúdo de I5 e cole nas células I9, I13, I17, I21, I25.  
(5) G4, G5, G6 digite os valores para a primeira aproximação. Estes valores podem ser arbitrários.

No modelo começamos com (0, 0, 0).  
Coluna H, fórmulas das iterações.  
(6) H4: digite =(1/3)\*(2-2\*G5-G6).  
(7) H5: digite =(-1/5)\*(12-2\*H4-2\*G6)  
(8) H6: digite =(-1/6)\*(19-4\*H4-3\*H5)  
Na coluna G, raízes k+1  
(9) G7, G8 e G9: digite =H4, =H5 e H6, respectivamente.  
(10) Selecione as células H3, H4, H5. Copie (Crtl + C). Clique na célula H8 e cole. Clique na célula H12 e cole. Continue clicando e colando nas células H16, H20, H24.  
(11) Selecione as células G8, G9 e G10. Copie, conforme acima, para as células G8, G12, ..., G24.

**EXERCÍCIOS** 1. Resolva os sistemas usando (i) o método de eliminação (escalonamento); (ii) método de Gauss-Jacobi; (iii) método de Gauss-Seidel.

Para os casos (i) e (ii) a precisão deve ser inferior a 0,02.

a)   
3x1 + 2x2 + 4x3 = 1   
x1 + x2 + 2x3 = 2  
4x1 + 3x2 – 2x3 = 3

b)   
3x1 – 4x2 + x3 = 9   
x1 + 2x2 + 2x3 = 3   
4x1– 3x3 = -2

c)   
10x1 + 2x2 + x3 = 7   
x1 + 5x2 + x3 = -8   
2x1 + 3x2 + 10x3 = 6.

d)   
5x1 + x2 + x3 = 5   
3x1 + 4x2 + x3 = 6  
3x1+ 3x2 + 6x3 = 0.

e)   
x1 + x2 = 3   
x1 – 3x2 = -3.

f)   
2x1 + 2x2 + x3 + x4 = 7   
x1 – x2 + 2x3 – x4 = 1   
3x1 + 2x2 – 3x3 – 2x4 = 4  
4x1 + 3x2 + 2x3 + x4 = 12.

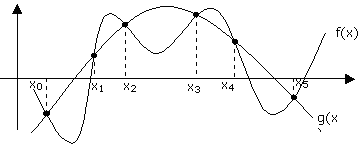
**CAP 04 - INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÕES**

**4.1 – PONTOS E GRÁFICOS**

No capítulo 1 comentamos a respeito dos erros cometidos nos processos de medição. Estes erros devem ser levados em conta quando desejamos, por exemplo, determinar a relação entre as grandezas envolvidas em um dado fenômeno.   
Para determinar essa relação, em geral, são efetuadas as medidas das grandezas envolvidas e os resultados são levados para um sistema de eixos coordenados.   
Como existem erros nestas medidas, provavelmente, os pontos não estarão tão bem dispostos de modo se obter a relação correta.  
Neste capítulo estudaremos procedimentos que permitem, a partir de pontos (x, f(x)) obtidos em medições, determinar a função que mais se aproxima desses pontos, bem como determinar valores desconhecidos entre os experimentados (interpolação) e fora do intervalo experimentado (extrapolação).  
A interpolação também é útil quando se quer derivar ou diferenciar uma função onde estas operações são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem efetuadas.

**4.2 – O QUE É A INTERPOLAÇÃO**

Consideremos um conjunto de pontos (x0, f(x0)), (x1, f(x1)), (x2, f(x2)), ...., (xn, f(xn)).  
Interpolar consiste em determinar uma função g(x) tal que: g(xi) = f(xi), i = 0, 1, 2, ... , n.  
Graficamente isto significa:



No gráfico, (x0, f(x0)), (x1, f(x1)), (x2, f(x2)), (x3, f(x3)), (x4, f(x4)), (x5, f(x5)), são valores conhecidos e que pertencem à função f(x) muitas vezes desconhecida. A função g(x) é a função que será determinada e que tem em comum com f(x) os pontos (x0, f(x0)), (x1, f(x1)), (x2, f(x2)), (x3, f(x3)), (x4, f(x4)), (x5, f(x5)), denominados nós de interpolação.  
           No nosso estudo adotaremos a interpolação polinomial (determinar a função g(x) em forma de uma função polinomial), apesar de que g(x) pode ser uma função de qualquer tipo (racional, logarítmica, exponencial, trigonométrica, etc). **4.3 – INTERPOLAÇÃO POR RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR**   
  
         Na interpolação polinomial,por meio de sistema linear, conhecidos n + 1 pontos (x0, f(x0)), (x1, f(x1)), (x2, f(x2)), ...., (xn, f(xn)), g(x) será um polinômio de grau menor ou igual a n, tal que:  
          **gn(xk) = f(xk), k = 0, 1, 2, ..., n, ou seja: gn(x) = a0 + a1x + a2x2 + .... + anxn.**

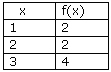
A definição permite construir um sistema linear  
gn(x0) = a0 + a1x0 + a2x02 + .... + anx0n = f(x0)  
gn(x1) = a0 + a1x1 + a2x12 + .... + anx1n = f(x1)  
gn(x2) = a0 + a1x2 + a2x22 + .... + anx2n = f(x2)  
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  
gn(xn) = a0 + a1x2 + a2x22 + .... + anxnn = f(xn)  
onde (a0, a1, a2, …, an) são os coeficientes do polinômio a determinar, xik , i = 0, 1, 2, .... n e  
k = 0, 1, 2, ... n, os coeficientes das variáveis ai, i = 0, 1, 2, ... n.

          Este sistema solução única pois a matriz formada por x0, x1, x2, ..., xn (coeficientes das variáveis) é uma matriz de Vandermonte e sendo (x0, f(x0)), (x1, f(x1)), (x2, f(x2)), ...., (xn, f(xn)), pontos distintos o determinante dessa matriz é diferente de zero.  
Para se fazer uma previsão do erro, calcula-se as diferenças di = |f(xi) = g(xi)|. O erro cometido é menor que a maior diferença.  
          Deve-se entretanto, tomar o devido cuidado quando se usa o método de eliminação de Gauss numa aritmética de ponto flutuante, para a solução do sistema,  pois a polinômio gerado pode não ser fiel aos pontos conhecidos.

Vejamos alguns exemplos

(1) Seja determinar o polinômio g(x) que interpola os dados da tabela: Como são três pontos, o polinômio de grau mínimo deve ser 3 – 1 = 2.   
Assim, g2(x) = a0 + a1x + a2x2.  
  
g2(x1) = a0 + a1x1 + a2x12 = a0 + a1.1 + a2.12 = a0 + a1 + a2 = 2  
g2(x2) = a0 + a1x2 + a2x22 = a0 + a1.2 + a2.22 = a0 + 2a1 + 4a2 = 2  
g2(x3) = a0 + a1x3 + a2x32 = a0 + a1.3 + a2.32 = a0 + 3a1 + 9a2 = 4.  
Resolvendo o sistema: a0 = 4; a1 = -3, a2 = 1. (utilize um dos métodos aprendidos no capítulo anterior para resolver o sistema).  
O polinômio é então g2(x) = 4 – 3x + x2.  
  
(2) Dada a tabela, determinar o polinômio que interpolador, usando uma aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos. Explicitar uma previsão do erro.





Sendo 4 pontos, o polinômio é de grau 4 - 1 = 3 ou inferior.

g2(x1) = a0 + a1x1 + a2x12 + a3x13 = a0 + a1.1 + a2.12 + a313= a0 + a1 + a2 + a3 = 7  
g2(x2) = a0 + a1x2 + a2x22 + a3x23 = a0 + a1.2 + a2.22 + a323= a0 + 2a1 + 4a2 + 8a3 = 2  
g2(x3) = a0 + a1x3 + a2x32 + a3x33 = a0 + a1.3 + a2.32 + a333= a0 + 3a1 + 9a2 + 27a3 = 5  
g2(x4) = a0 + a1x4 + a2x42 + a3x43 = a0 + a1.4 + a2.42 + a343= a0 + 4a1 + 16a2 + 64a3 = 9

Resolvendo o sistema, por algum dos processos descritos no capítulo anterior, resulta: a0 = 0.2700 x 102; a1 = -0.2983 x 102; a2 = 0.1100 x 102; a3 = -0.1167 x 101.   
Vejamos os erros cometidos:  
g(1) = 7,003; g(2) = 2,004; g(3) = 5,001; g(4) = 8,992.   
d1 = |7 – 7,003| = 0,003; d2 = |2 – 2,004| = 0,004; d3 = |5 – 5,001| = 0,001; d4 = |9 – 8,992| = 0,008.  
Portanto, o polinômio é g(x) = 0.2700 x 102 - 0.2983 x 102.x + 0.1100 x 102.x2 - 0.1167 x 101x3, com precisão de 0,008, pois o maior valor dos di é 0,008.

**EXERCÍCIO**

 Considerando os pontos da tabela abaixo e usando uma aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos, determine o polinômio interpolador. Dê uma previsão do erro.



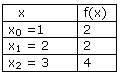
Resposta: g(x) = -0,1200.102 + 0,5500.103x + 0,3500.105x2 –0,1000.107x3.

**4.4 – PROCESSO DE LAGRANGE**

A interpolação segundo Lagrange tem o polinômio gn(x) interpolador expresso por:  
  **gn(x) = f(x0).L0(x) + f(x1).L1(x) + f(x2)L2(x) + … f(xn).Ln(x)**   
         onde Lk(x) são polinômios de grau n.  
Para cada i, deverá ser satisfeita a condição: gn(xi) = y0L0(xi) + y1L1(xi) + ....+ ynLn(xi) = f(xi), o que implica em Lk(xi) = 0 se k ≠ i e Lk(xk) = 0.  
Desta forma, Lk(x) deve ser definida por

interp_2_1

Note que não configura no numerador o termo (x – xk) e no denominador o termo (xk – xk).  
Sendo o numerado um produto de n fatores de primeiro grau, o grau de Lk(x) é um polinômio de grau n. Consideremos por exemplo determinar por Lagrange, o polinômio que melhor se ajuste aos pontos



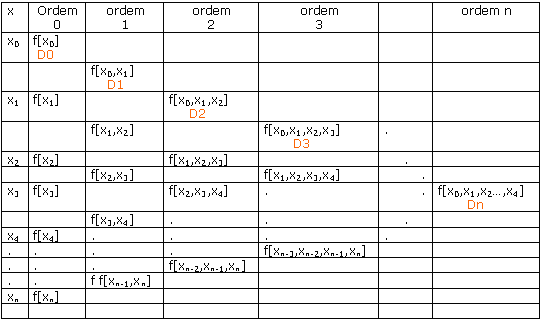
Temos: g2(x) = f(x0).L0(x) + f(x1).L1(x) + f(x2)L2(x)   
Calculando os polinômios de Lagrange:  
L0(x) = (x – x1).(x – x2)/(x0 – x1).(x0 – x2) = (x – 2).(x – 3)/(1 – 2).(1 – 3) = (x2 – 5x + 6)/2.  
Note que não foram usados (x – x0) e (x0 – x0).  
L1(x) = (x – x0).(x – x2)/(x1 – x0).(x1 – x2) = (x – 1).(x – 3)/(2 – 1).(2 – 3) = (x2 – 4x + 3)/(-1).  
Note que não foram usados (x – x1) e (x1 – x1).  
L2(x) = (x – x0).(x – x1)/(x2 – x0).(x2 – x1) = (x – 1).(x – 2)/(3 – 1).(3 – 2) = (x2 – 3x + 2)/2.  
Assim: g(x) = 2.[(x2 – 5x + 6)/2] + 2.[(x2 – 4x + 3)/(-1)] + 4.[(x2 – 3x + 2)/2]  
Efetuando as multiplicações e reduzindo os termos semelhantes, resulta finalmente:  
g(x) = x2 –3x + 4. (veja o primeiro exemplo do item 4.3).

**4.5 – MÉTODO DE NEWTON**

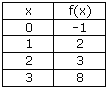
O método de Newton para o polinômio que interpola f(x) é dado por  
            **pn(x) = D0 + D1.(x – x0) + D2.(x – x0)(x – x1) + D3.(x – x0)(x – x1)(x – x2) + ... + Dn.(x – x0)(x – x1)(x – x2)…(x – xn-1).**

Chamamos o vetor (D0, D1, D2, …, Dn) de operador diferenças divididas (ODD) pois os coeficientes Di, i = 0, 1, 2,...,n, são obtidos por uma razão entre diferenças.  
Estes operadores são assim definidos:  
D0 = que pode ser simbolizado por f[x0] = f(x0) (ODD de ordem zero).  
D1 = simbolizado por f[x0, x1] = (f[x1] – f[x0])/(x1 – x0) = (f(x1) – f(x0))/(x1 – x0) (ODD de ordem 1).  
D2 = f[x0, x1, x2] = (f[x1, x2] – f[x0, x1])/(x2 – x0) =   
= {[(f(x2) – f(x1))/(x2 – x1)] – [(f(x1) – f(x0))/(x1 – x0)]}/(x2 – x0) =   
= [(f(x2) – f(x1)).(x1 – x0) – (f(x1) – f(x0)).(x2 – x1)]/(x2 – x1).(x2 – x0).(x1 – x0). (ODD de ordem 2)  
D3 = f[x0, x1, x2, x3] = (f[x1, x2, x3] – f[x0, x1, x2])/(x3 – x0) (odd de ordem 3).  
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .   
Dn = f[x0, x1, x2, x3, …, xn] = (f[x1, x2, x3, …, xn] – f[x0, x1, x2, … xn-1])/(xn – x0) (ODD de ordem n).

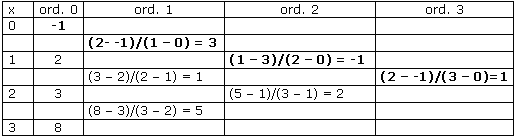
O desenvolvimento das expressões dos Di torna-se cada vez mais complexo. Assim, é comum apresentar as diferenças divididas em um quadro (algoritmo), conforme abaixo



A tabela das ODD (acima) pode ser construída no StarCalc ou no Excel. Para isto, digite os valores de xi e f(xi) conforme indicado acima. Faz-se o cálculo para o primeiro elemento das colunas seguintes. Copia (Ctrl + C) o primeiro elemento e cola (Ctrl + V) na mesma coluna saltando uma célula.   
 Na prática,   
(1) os elementos da primeira coluna são os valores tabelados para x;  
(2) os elementos da segunda coluna são os valores tabelados para f(x);  
(3) o elemento f[xk, xk + 1, xk + 2, .....xk + n] é obtido pela diferença entre os elementos imediatamente abaixo e acima da coluna anterior dividido pela diferença (xk +n – xk).  
(4) os coeficientes dos produtos do polinômio interpolador são os valores D0, D1, D2, ..., Dn indicados na tabela.  
  
Exemplo: determinar o polinômio interpolador para a tabela:



Construindo a tabela para as diferenças divididas:



Temos então: q4(x) = -1 + 3.(x – 0) + (-1).(x – 0).(x – 1) + 1.(x – 0).(x – 1).(x – 2) ⇔  
⇔ q4(x) = x3 – 4x2 + 6x – 1.

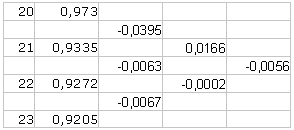
**4.6 – ERRO NA INTERPOLAÇÃO NO MÉTODO DE NEWTON**

Quando se aplica qualquer método de interpolação, erros são cometidos. Se f(x) é a função correta e gn(x) é o polinômio interpolador teremos evidentemente como erro:  
 **En(x) = f(x) – gn(x) para todo o intervalo [x0, xn].**   
           Demonstra-se que En(x) = (x – x0).(x – x1)....(x – xn).fn+1(x’)/(n + 1)!, onde fn + 1(x’) é a derivada de ordem n + 1 no ponto x’ ∈ [x0, xn].  
Como, geralmente não se conhece f(x), usa-se fazer apenas uma estimativa |E’n(x)| do erro, cujo valor é  
 **|E’n(x)| = |(x – x0).(x – x1).(x – x2)...(x – xn)|**.  
                (valor absoluto máximo das diferenças divididas de ordem n + 1)

Seja, por exemplo, calcular cos 22,8º, em uma aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos,usando um polinômio interpolador de     a) grau 1      b) grau 2      c) grau 3,      sendo conhecida a tabela

interp_2_6

Para se obter um polinômio de grau n são necessários n + 1 nós (pontos).  
Construindo a tabela das diferenças divididas:



a) para grau 1, devemos usar dois nós que limitam o valor desejado. Como 22º < 22,8º < 23º, usaremos os nós 22º e 23º  
Assim, g1(x) = 0,9272 – 0,0067.(x – 22) ⇒ g1(22,8º) = 0,9272 – 0,0067.(22,8º - 22º) =  
= 0,9272 – 0,0054 = 0,9218.  
Erro E1 < |(x – x0).(x – x1).(|Max(D2)| |= |(22,8º - 22)(22,8º - 23)|.(0,0166) = 0,0027.  
Usando uma calculadora cos (22,8º) = 0,9219. Erro = |0,9219 – 0,9218| = 0,0001 < 0,0027.

b) para grau 2, devemos usar os três nós.  
Temos g2(x) = 0,9335 + (x – 21).(-0,0063) + (x – 21).(x – 22).(-0,0002) ⇒  
⇒ 0,9335 + (22,8 – 21).(-0,0063) + (22,8 – 21).(22,8 – 22).(-0,0002) = 0,9219.  
Erro E2 < |(x – x0)(x – x1)(x – x3)|Max|(D3)|= 0,0000.

c) para grau 3, devemos usar os quatro nós.  
g3(x) = 0,973 + (x – 20)(-0,0395) + (x – 20)(x – 21)(0,0166) + (x –20)(x – 21)(x – 22)(-0,0056) ⇒  
⇒ g3(22,8º) = 0,973 + (22,8 – 20)(-0,0395) + (22,8 – 20)(22,8 – 21)(0,0166) +   
+ (22,8 –20)(22,8 – 21)(22,8 – 22)(-0,0056) = 0,9234

Note que o erro neste caso aumentou.

Isto se deve ao afastamento de 20º em relação a 22,8º.   
O aumento do erro ocorre pois a cada intervalo a secante mais se afasta da tangente à curva f(x), à medida que o ponto x0 se afasta de x3 pois 22,8º está mais próximo de x3 que de x0. O erro dependerá sempre da concavidade da curva no intervalo considerado.

**4.7 – FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR**

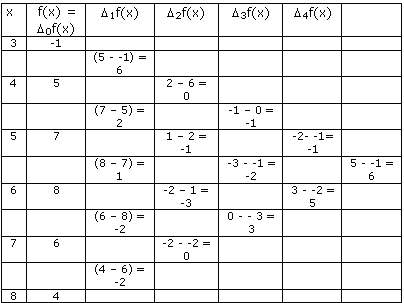
Este processo é usado quando os nós de interpolação são igualmente espaçados.  
Para esta forma de interpolação, o operador (Δ0f(x),Δ1f(x), Δ2f(x), Δ3f(x), ..., Δnf(x)), denominado operador de diferenças ordinárias, substitui os operadores D1, D2, D3, ..., Dn no método de Newton.  
Sendo h a diferença entre dois nós consecutivos, isto é h = xn – xn-1 ⇒ xi = x0 + hi, o operador de diferenças ordinárias é assim definido:  
Δ0f(x) = f(x)   
Δ1f(x) = f(x + h) – f(x);  
Δ2f(x) = Δf(x + h) - Δf(x);  
Δ3f(x) = Δ2f(x + h) - Δ2f(x)  
. . . . . . . . . . . . . . . . . . .   
Δnf(x) = Δn-1f(x + h) - Δn-1f(x).

A tabela de diferenças ordinárias é semelhante à tabela de diferenças divididas, sendo que na tabela de diferenças ordinárias cada termo é igual à diferença entre os termos na coluna da esquerda imediatamente inferior e superior. (não se faz a divisão pela diferença entre os dois nós).

Exemplo: determinar o polinômio interpolador dada a tabela:



Construindo a tabela das diferenças, temos:



O polinômio interpolador é g(x) = -1 + 6.(x – 3) + 0.(x – 3).(x – 4) –1.(x – 3)(x – 4).(x – 5) - 1. (x – 3)(x – 4).(x – 5)(x – 6) + 6.(x – 3)(x – 4).(x – 5)(x – 6)(x – 7), que desenvolvido resulta em: g(x) = 6x5 – 151x4 + 2087x3 – 7157x2 + 12500x + 15543.

**4.8 – INTERPOLAÇÃO INVERSA**

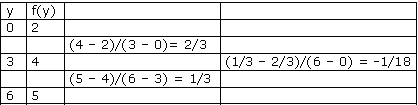
A interpolação inversa consiste em: dado y’ encontrar um x’ tal que f(x’) = y’.  
Lembre-se que y’ e x’ são aproximações de y e x.  
Podemos adotar, entre outros, os procedimentos:  
(1) escolhe-se o intervalo [xk, xk+1] que contenha um x’, tal que f(x’) = y’ e utiliza a interpolação linear g1(x) = f(xk).(x-xk+1)/((xk – xk+1) + f(xk+1).(x – xk)/(xk+1 – xk).  
Como g1(x) é uma função de primeiro grau, faz-se g’(x) = y’ e então se calcula x = x’.

Exemplo: Dada a tabela  
x 2 4 5 7 9  
f(x) 0 3 6 5 2, calcular x, tal que f(x) = 4,5.

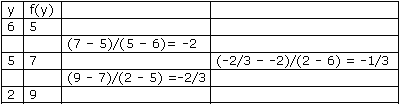
Ora, y’ = 4,5 pertence aos intervalos [3, 6] e [2, 5]. Vamos usar então a interpolação nos intervalos   
[4, 5] e [7, 9] determinados pelos nós.

Para o intervalo [4, 5]  
g1(x) = f(4).(x – 5)/(4 – 5) + f(5).(x – 4)/(5 – 4) = 3.(x – 5)/(-1) + 6.(x – 4)/1 =   
= -3x + 15 + 6x – 24 = 3x – 9.   
Para f(x’) = 4,5, 3.x’ – 9 = 4,5 ⇔ x’ = 4,5.  
Para o intervalo [7, 9]  
g1(x) = f(7).(x – 9)/(7 – 9) + f(9).(x – 7)/(9 – 7) = 5.(x – 9)/(-2) + 2.(x – 7)/2 =   
= (-5x + 45 + 2x – 14)/2 = (-3x + 31)/2.   
(-3x + 31)/2 = 4,5 ⇔ -3x + 31 = 9 ⇔ x = 7,33.

(2) Usando o método de Newton, onde se calcula o polinômio interpolador gn-1(y).  
Calculado o polinômio gn-1(y), determina-se então gn-1(y’).  
Neste caso, a função deverá ser estritamente crescente ou estritamente decrescente no intervalo que contém x’, tal que f(x’) = y’.  
Usando a mesma tabela do caso (1), onde y é a variável, vemos que y’ = 4,5 está contido em dois intervalos de valores de y, que corresponde aos intervalos [4, 5] e [7, 9] de variação de x.  
Como a função não é estritamente crescente ou estritamente decrescente podemos dividi-la em dois intervalos de x, 2 a 5 e 5 a 9.  
Construindo a tabela de diferenças divididas para y teremos:  
Intervalo de variação de x = [2, 5] correspondente ao intervalo [0, 6] de variação de y.



g2(y) = 2 + (2/3)(y – 2) + (-1/18).(y – 2).(y – 4) = -(1/18)y2 + y + 2/9   
Assim, g2(4,5) = (-1/18).4,52 + 4,5 + 2/9 = **3,579.**Intervalo de variação de x = [5, 9] correspondente ao intervalo [6, 2] de variação de y.



g2(y) = 5 + (-2).(y – 6) + (-1/3)(y – 6).(y – 5) = (-1/3)y2 + (5/3)y + 7   
g2(4,5) = (-1/3).4,52 + (5/3).4,5 + 7 = **7,75**.

**EXERCÍCIOS:**

1. Dada a tabela

interp_6_1

a) construa a tabela das diferenças divididas;  
b) construa a tabela das diferenças ordinárias;  
Determine o polinômio de grau 3, g3(x), que interpola a tabela pelo método  
c) resolução de sistema;  
d) de Lagrange  
e) de Newton  
f) de Newton-Gregory.

Com o polinômio determinado por cada um dos métodos acima determine: g3(2) e g3(4).  
Os valores coincidem com os tabelados?

2. Considere a tabela:

interp_6_2

Determine o polinômio de grau 2 que interpola a função f(x), usando o método de Lagrange e o método de Newton.  
Considere inicialmente x0 =2, faça os cálculos.  
Considere agora x0 = 2,5, refaça os cálculos.  
Qual é o erro cometido em cada caso?

3. Use uma calculadora para determinar f(1,3), f(1,4), f(1,5), f(1,6), sendo f(x) = ex, usando uma aritmética de ponto flutuante com 5 dígitos.  
(a) Determine um polinômio de 3º grau que interpola f(x).  
(b) calcule, usando o polinômio, f(1,46).  
(c) calcule, usando uma calculadora, f(1,46).  
(d) Qual foi o erro absoluto cometido?  
(e) Qual foi o erro relativo cometido?

4. Dada a tabela

interp_6_3

Determine x, tal que f(x) = 19,5,  
(a) usando a interpolação linear;  
(b) usando o método de Newton para determinar o polinômio gn(y) de grau 3.  
  
5. Dada a tabela

interp_6_4

Usando uma aritmética de ponto flutuante com 6 dígitos, determine, usando o método de Lagrange para obter o polinômio interpolador, calcule x, tal que f(x) = -2.

6. Consulte uma tabela das funções trigonométrica e, usando uma aritmética de ponto flutuante com 6 dígitos, construa tabela x, f(x) = sen x para x = 5º, x = 10º, x = 15º, x = 20º.  
Determine, pelos métodos  
(a) resolução de sistema, polinômio de grau 4  
(b) de Newton, polinômio de grau 3  
(c) de Lagrange, polinômio de grau 3  
o polinômio interpolador.  
Usando cada um dos polinômios calcule: sen 8º e sen 17º.  
Calcule o erro em cada um dos casos.

**CAP 5 - MÍNIMOS QUADRADOS**

**5.1 – INTRODUÇÃO**

No capítulo anterior vimos diversos processos que determinam um polinômio interpolador. Entretanto, existem casos em que o polinômio interpolador não se ajusta satisfatoriamente aos valores conhecidos e, assim, devemos utilizar métodos alternativos.  
O método dos mínimos quadrados é um dos processos alternativos para determinar a função, não necessariamente polinomial, que se adapte ao conjunto de valores conhecidos.  
Este método é também usado quando, dada uma função se quer obter uma outra que “mais se aproxima” da função dada.  
           No método dos mínimos quadrados é essencial que se plotem (marquem), em um sistema de eixos cartesianos, os valores (x, f(x)) conhecidos. A partir da distribuição dos pontos no gráfico procura-se a função ou combinação de funções que mais se adapte a esta distribuição.  
 O método dos mínimos quadrados é aconselhável em situações como:  
(1) obter valores de f(x) fora do intervalo tabelado (extrapolação);  
(2) tabelas construídas a partir de medidas de grandezas envolvidas em um fenômeno cuja lei se quer determinar;  
(3) substituição de uma função conhecida por outras funções, como ajustar os pontos distribuídos em uma reta (regressão linear).  
A situação (2) é justificada pois ao realizar medidas, os erros são evidentes. Sejam eles devido à precisão do aparelho (menor divisão), defeitos no aparelho (dilatação), interferência de efeitos externos (ação de campos magnéticos, elétricos, temperatura, pressão, etc) bem como a erros cometidos pelo próprio experimentador.  
 Ao aplicar o método dos mínimos quadrados devemos levar em conta duas possibilidades:

(a) “discreto” - quando a função referente a distribuição dos pontos não é conhecida. Neste caso o número de pontos é finito e a função de referência é estabelecida a partir de um modelo matemático suposto para as relações existentes entre as grandezas. A exigência em tal situação é que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima . Isto implica em uma aproximação da função real com a função a ser determinada.

minqu_1_1

para se obter a soma dos desvios quadrados para o ponto xk, sendo n o número de coordenadas tabeladas e em conseqüência o desvio quadrático mínimo.  
Usa-se o sinal de somatório por ser o conjunto de pontos um conjunto discreto.

(b) “contínuo” – procedimento usado quando a função é conhecida e se deseja uma nova função que se aproxima suficientemente da função conhecida. O número de pontos é então infinito pois podem ser obtidos a partir da própria função. Uma vez que a função f(x) é conhecida, o conjunto de pontos é um conjunto que apesar de parecer discreto ele é denso pois, é possível obter f(x).  
Neste caso podemos usar a expressão abaixo para o desvio.

minqu_1_2

A partir dessa expressão calcula-se a dos desvios quadráticos.

**5.2 – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA CASO DISCRETO**   
Para casos discretos, são dados os pontos (x1, y1), (x2, y2), (x3, y3) ..., (xm, ym). As funções g1(x), g2(x), g3(x), ..., gn(x), são escolhidas através de um critério qualquer, com n < m.  
Devemos determinar os coeficientes a1, a2, ..., an, de modo que a função  
 h(x) = a1.g1(x) + a2.g2(x) + a3.g3(x) + ....+ an.gn(x)  
se aproxime convenientemente de f(x).  
Se h(x) for uma reta, o processo é também chamado de regressão linear.  
A condição imposta para que isso aconteça no método dos mínimos quadrados é que a soma dos quadrados dos desvios para cada uma das medidas seja mínima.  
Assim,

minqu_2_8

Ora, a soma acima é uma função de a1, a2, a3, ..., an.

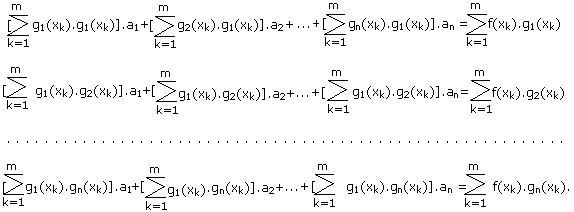
minqu_2_1

minqu_2_2

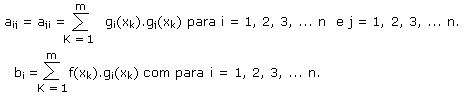
O mínimo de F(a1, a2, a3, ..., an) quando as derivadas parciais se anularem. Deste modo, teremos:

minqu_2_3

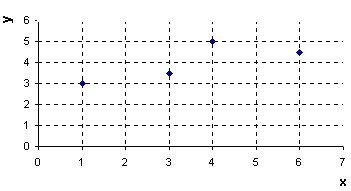
Igualando a zero as df/dai pode-se obter o sistema abaixo:



Resumindo: dados m pontos e escolhidas n funções, g1(x), g2(x), g3(x)... gn(x), a função h(x) que mais se aproxima dos pontos dados é h(x) = a1.g1(x) + a2.g2(x) + a3.g3(x) + ... + an.gn(x) onde a1, a2, a3, ... an são as soluções do sistema:  
          a11.a1 + a12a2 + a13a3 + ... + a1nan = b1 a21.a1 + a22a2 + a23a3 + ... + a2nan = b2 a31.a1 + a32a2 + a33a3 + ... + a3nan = b3  
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . an1.a1 + an2a2 + an3a3 + ... + annan = bn  
  
com:



Exemplo 1 - Determinar a reta que melhor se ajusta à tabela:

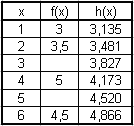
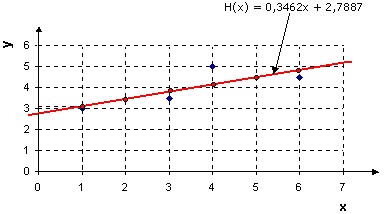
O gráfico ao lado da tabela mostra a distribuição dos pontos em um plano cartesiano.

Como se deseja obter a reta que melhor se ajusta aos pontos, a função h(x) terá a forma h(x) = a1.g1(x) + a2.g2(x), sendo g1(x) uma função de primeiro grau e g2(x) uma função de grau 0 (constante).  
Vamos escolher as funções gi(x) como g1(x) = x e g2(x) = 3. Importante, a escolha foi arbitrária.  
De acordo com o exposto, n = 2, duas funções escolhidas e m = 4, quadro pontos dados.  
Os coeficientes do sistema serão aij, i = 1, 2 pois n = 2. Ou seja, coeficientes a11, a12, a21 e a22 definidos por

minqu_2_15  
  
a11 = g1(x1).g1(x1) + g1(x2).g1(x2) + g1(x3).g1(x3) + g1(x4).g1(x4) = 1.1 + 3.3 + 4.4 + 6.6 = 62   
a12 = a21 = g1(x1).g2(x1) + g1(x2).g2(x2) + g1(x3).g2(x3) + g1(x4).g2(x4) =   
= 1.3 + 3.3 + 4.3 + 6.3 = 42   
a22 = g2(x1).g2(x1) + g2(x2).g2(x2) + g2(x3).g2(x3) + g2(x4).g2(x4) = 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3 = 36.

minqu_2_16  
Os valores de f(xk) são os valores tabelados.   
b1 = f(x1).g1(x1) + f(x2).g1(x2) + f(x3).g1(x3) + f(x4).g1(x4) = 3.1 + 3,5.3 + 5.4 + 4,5.6 = 60,5   
b2 = f(x1).g2(x1) + f(x2).g2(x2) + f(x3).g2(x3) + f(x4).g2(x4) = 3.3 + 3,5.3 + 5.3 + 4.5.3 = 48.   
Temos então o sistema:   
               a11.a1 + a12.a2 = b1   
               a21.a1 + a22.a2 = b2   
Que, com os valores calculados resulta em:   
                62a1 + 42a2 = 60,5   
                42a2 + 36a2 = 48.   
Resolvendo o sistema teremos: a1 = 0,3462 e a2 = 0,9295

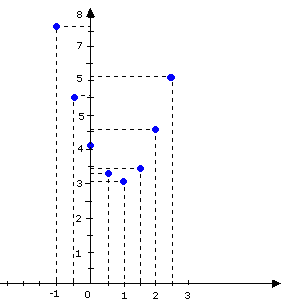
Conforme indicado no início deste exemplo, a  equação da reta é   
h(x) = a1.g1(x) + a2.g2(x) = 0,3462.x + 0,9295.3 ⇒ **h(x) = 0,3462x + 2,7885.**   
  
Mostramos abaixo valores tabelados para x, f(x) e h(x) bem como o gráfico com os pontos de f(x) e a reta h(x).

Exemplo 2: Considerando a tabela abaixo, determinar a função de segundo grau que melhor se adapte ao conjunto de pontos dados, usando apenas os quatro pontos centrais da tabela.

minqu_2_6

Esboçando o gráfico relativo aos pontos temos:



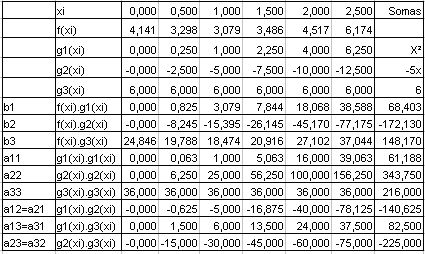
A figura acima mostra os pontos da tabela plotados em um sistema de eixos cartesianos.  
Pela forma da curva é de se supor que a mesma seja do tipo ax2 + bx + c.  
Consideremos então as funções g1(x) = x2, g2(x) = -5x e g3(x) = 6.  
Temos então: h(x) = a1.g1(x) + a2.g2(x) + a3.g3(x).  
Devemos então determinas os coeficientes a1, a2, a3.

O sistema de ajustamento das funções, usando apenas os seis pontos centrais da tabela é:   
(1) [g1(x1). g1(x1) + g1(x2). g1(x2) + ... +g1(x6).g1(x6)]a1 +   
 [g2(x1). g1(x1) + g2(x2). g1(x2) + ... +g2(x6). g1(x6)]a2 +   
 [g3(x1). g1(x1) + g3(x2). g1(x2) + ...+g3(x6). g1(x6)]a3 =   
= f(x1). g1(x1) + f(x2). g1(x2) + ... + f(x6). g1(x6)

(2) [g1(x1). g2(x1) + g1(x2). g2(x2) + ... g1 (x6). g2(x6)]a1 +   
 [g2(x1). g2(x1) + g2(x2). g2(x2) + ...+g2(x6). g2(x6)]a2 +   
 [g3(x1). g2(x1) + g3(x2). g2(x2) + ...+g3(x6). g2(x6)]a3 =   
= f(x1). g2(x1) + f(x2). g2(x2) + ... +f(x6). g2(x6)

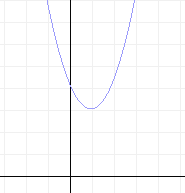
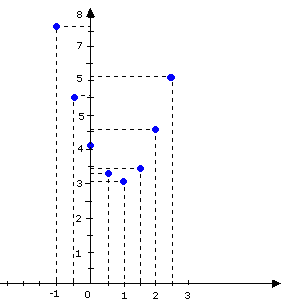
(3) [g1(x1). g3(x1) + g1(x2). g3(x2) + ...+g1(x6). g3(x6)]a1 +   
 [g2(x1). g3(x1) + g2(x2). g3(x2) + ...+g2(x6). g3(x6)]a2 +   
 [g3(x1). g3(x1) + g3(x2). g3(x2) + ...+g3(x6). g3(x6)]a3 =   
= f(x1). g3(x1) + f(x2). g3(x2) + ...+f(x6). g3(x6)

Podemos construir um algoritmo que facilite a determinação dos termos acima.



                      \* as últimas três linhas são as combinações de g1, g2, g3 tomados 2 a 2.   
O sistema é então:  
61,19.a1 -140,63.a2 + 82,50.a3 = 68,40   
-140,63.a1 + 343,75.a2 - 225,00.a3 = -172,1   
82,50.a1 - 225,00.a2 + 216,00.a3 = 56,0160

que resolvido obtém-se a1 = 1,2500; a2 = 0,4624 e a3 = 0,6902   
A função h(x) é então h(x) = 1,2500x2 +0,4624(-5x) + 0,6902.6 = 1,2500x2 - 2,312x + 4,1412  
Obs. Os cálculos da tabela e a solução do sistema foram realizados no StarCalc.  
Compare o gráfico da função h(x) com os pontos dados na figura abaixo.

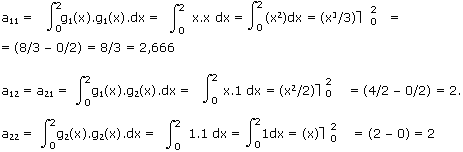
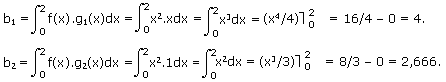
     

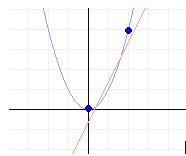
**5.3 – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA CASO CONTÍNUO**

No caso contínuo, onde a função f(x) é conhecida, os somatórios são substituídos pelas integrais no intervalo [a, b] onde **a** é o menor valor de x e **b** o maior valor de x tabelados. O procedimento para obtenção das equações é o mesmo usado no caso discreto.  
Assim, dados m pontos para a função f(x), conhecida, e escolhidas n funções, g1(x), g2(x), g3(x)... gn(x), a função h(x) que mais se aproxima dos pontos dados é h(x) = a1.g1(x) + a2.g2(x) + a3.g3(x) + ... + an.gn(x) onde a1, a2, a3, ... an são as soluções do sistema, conforme visto no método para distribuição discreta.  
a11.a1 + a12a2 + a13a3 + ... + a1nan = b1a21.a1 + a22a2 + a23a3 + ... + a2nan = b2a31.a1 + a32a2 + a33a3 + ... + a3nan = b3  
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .an1.a1 + an2a2 + an3a3 + ... + annan = bn  
  
com:

minqu_3_1  
minqu_3_4

Este procedimento é usado principalmente quando se quer obter a reta que mais se aproxima dos pontos definidos pela função (regressão linear).  
  
Exemplo 1 : Seja determinar a reta que melhor se ajusta à curva de f(x) = x2 no intervalo [0, 2] considerando apenas os pontos (0, 0) e (2, 4).  
Solução: como se deseja uma reta, façamos g1(x) = x e g2(x) = 1.  
a11.a1 + a12.a2 = b1   
a21.a1 + a22.a2 = b2.Calculando os coeficientes e os termos independentes temos:

  
  
Substituindo os coeficientes no sistema, resulta: 2,666a1 + 2a2 = 4  
2a1 + 2a2 = 2,666, que tem por solução: a1 = 2,003 e a2 = -0,670.

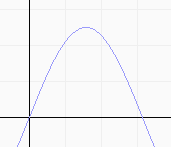


Deste modo, a equação da reta é: h(x) = 2,003x - 0,670. Veja o gráfico.

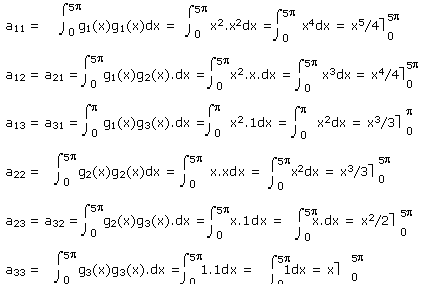
Exemplo 2.  Dada função f(x) = 5sen (x/2), no intervalo [0, 5π].  
Determinar a função de segundo grau que melhor se ajusta à curva de f(x) =  5sen (x/2), no intervalo [0, 5π].

O gráfico da função f(x) dada, no intervalo considerado é:

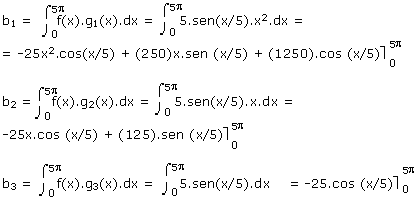
Como é desejada uma função de terceiro grau, vamos escolher:  g1(x) = x2, g2(x) = x e g3(x) = 1.



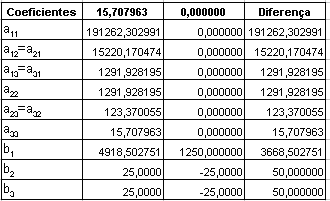
Sendo três as funções escolhidas, teremos três equações. Os coeficientes das variáveis são:



Para os termos independentes:

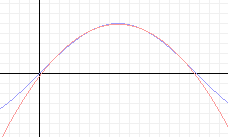


Usando o StarCalc para calcular os coeficientes e termos independentes obtemos a tabela abaixo:



Podemos então formar o sistema:   
1291,9282a1 + 15220,1705a2 + 1291,9282a3 = 3668,5  
15220,1705a1 + 1291,9282a2 + 1291,9282a3 = 50,0000  
291,9282a1 + 123,3701a2 + 15,7080a3 = 50,0000

       cuja solução é: a1 = -0,084374; a2 = 1,326218 e a3 = -0,293508  
Desta forma, a função de segundo grau que melhor se adapta à função f(x) = 5.sen (x/5) no intervalo [0, 5]π é  
h(x) = -0,084374x2 + 1,326218x - 0,293508.  
Abaixo estão os gráficos de f(x) = 5.sen (x/5) e h(x) = -0,084374x2 + 1,326218x - 0,293508.



**5.4 - AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS**  
  
        Nos itens anteriores procuramos aproximar uma distribuição de pontos por meio de uma função polinomial do tipo h(x) = anxn + an-1xn-1 + ... + a1x + a0 e, em especial de uma função h(x) = a1x + a0 (linearização), através dos métodos "sistema linear", "Lagrange", "Newton", "Newton-Gregory" e "Mínimos Quadrados".   
Entretanto, nem toda distribuição fica adequadamente representada por uma função polinomial. Os desvios podem ser tão grandes que a função obtida não tenha nenhum significado.   
O problema do desvio aumenta, principalmente quando desejamos obter um valor aproximado de f(x) quando x está fora do intervalo tabelado.   
Para minimizar o problema podemos tentar aproximar a distribuição de uma função não polinomial. Para isso é importante conhecer alguns tipos de gráficos que auxiliarão na escolha das funções g1(x), g2(x), ... gn(x) e então obter como melhor aproximação a função h(x) = a1.g1(x) + a2.g2(x) + ... angn(x) para uma distribuição de n + 1 ou mais pontos.  
  
       Iremos inicialmente apresentar algumas informações sobre como construir  e formatar um gráfico no EXCEL e a seguir analisar alguns tipos de gráficos, bem como transformar uma função não polinomial em uma função linear.

**5.5 - CONSTRUINDO E FORMATANDO GRÁFICOS NO EXCEL.**   
  
       Os gráficos no item seguinte foram construídos no EXCEL, adotando-se o seguinte procedimento:  
(1) Constrói-se a tabela dos pontos (x, f(x)) conhecidos.  
(2) Seleciona os valores de f(x).

(3) Clica-se no ícone Assistente de gráfico

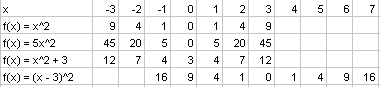
assist_graf

(4) Na janela de opções clica na opção

assist_graf1

(5) Clica-se no botão AVANÇAR.   
(6) Clica-se sobre a aba "Seqüência".   
(7) Na nova janela de opções, clica-se na seta vermelha, no canto direito do campo valores  de X. A janela irá minimizar. Selecionam-se então os valores de "x". Após a seleção, pressione a tecla "ENTER" para retornar à janela de opções.   
(8) Clica-se no botão AVANÇAR. Na nova janela de diálogo, nomeie os eixos (se desejar) e a seguir clique no botão AVANÇAR. Na nova janela, você pode optar entre (a) exibir o gráfico em outra planilha ou (b) inserir como objeto na planilha onde estão os valores de x e y. Clique no botão CONCLUIR para exibir o gráfico.   
  
          Vamos agora modificar alguns elementos do gráfico.  
(1) Clique sobre o texto "Seqüência" e delete.   
(2) Formatando a área do gráfico.- Posicione o mouse sobre a área do gráfico. Se posicionado corretamente será exibida a informação "Área de plotagem". Clique, com o botão direito do mouse, sobre a área. Ao ser exibida uma lista de opções, clique em "Formatar área de plotagem". Ao abrir a janela "Formatar área de plotagem", marque, nos campos "Borda" e "Área", a opção "Nenhuma". Clique no botão OK.  
(3) Formatando os eixos. - Posicione o ponteiro do mouse sobre o eixo horizontal (eixo dos x). Ao ser exibida a informação "Eixo dos valores (X)", clique, com o botão direito e a seguir clique na opção "Formatar eixo ..".  
Na janela que se abrirá, com várias abas,a clique na aba "Escala". Modifique de acordo com os dados da tabela, os valores dos campos: "Valor máximo", "Valor mínimo" e "Unidade Principal".  
Obs:  a "Unidade Principal" escolhida corresponderá às divisões do eixo. Deve tomar o cuidado para não escolher valores que levarão à sobreposição das unidades marcadas no eixo.  
Na aba "Fonte" pode-se escolher o tipo, tamanho e cor da fonte.  
Na aba "Número" pode-se escolher a forma de exibição do número, como, por exemplo, o número de casas decimais.  
(4) Repita o procedimento para formatar o eixo dos (Y).  
(5) Formatando as linhas de grade. - As linhas de grades são as linhas horizontais que passam pelos valores tabelados para Y. É interessante que as mesmas não se apresentem como linhas cheias iguais às dos eixos.  
Clique então sobre uma das linhas horizontais (não sobre o eixo) com o botão direito do mouse.  
Clique a seguir na opção "Formatar linhas de grade". Na janela "Formatar linhas de grade", campo "Estilo" selecione uma das opções apresentadas ao clicar na seta para baixo. Clique em OK.  
Pronto, seu gráfico está construído e formatado.

**5.6 - A FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU**         
        A tabela abaixo mostra pontos para a função y = x2 e algumas variantes.



Os respectivos gráficos são:

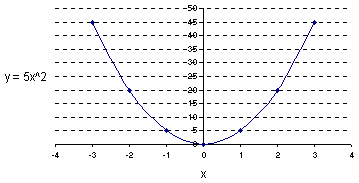
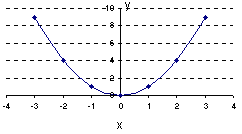
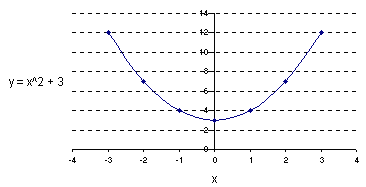
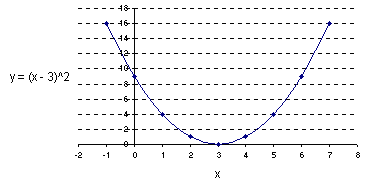


GRÁFICO I

GRÁFICO II



  
GRÁFICO III

  
GRÁFICO IV

Se observarmos todos os gráficos têm praticamente a mesma forma.   
Comparando o gráfico (II) com o gráfico (I), nota-se que o coeficiente de x2 faz aumentar ou diminui a abertura do gráfico.  
Para os gráficos (I) e  (III), a constante 3, fez o gráfico de f(x) = x2 deslocar-se verticalmente de 3 unidades para cima. Translação vertical  
Para os gráficos (I) e (IV), observa-se um deslocamento de 3 unidades para a direita, o que se deve a substituir a variável x por (x - 3). Translação horizontal.   
  
      Para uma função do tipo f(x) = ax2 + bx + c, podemos fazer:

f(x) = a[x2 + b/ax + (b/2a)2] + c - (b2/4a) ⇔ f(x) = a(x + b/2a)2 + c - (b2/4a).

Desta forma, podemos construir o gráfico de f(x) = ax2, e a seguir deslocá-lo |b/2a| unidade para a direita ou para a esquerda caso b/2a seja negativo ou positivo, respectivamente, e

|c - (b2/4a)| unidades para a cima ou para baixo caso c - (b2/4a) seja positivo ou negativo.

Vejamos um exemplo. Seja, construir o gráfico de f(x) = 3x2 - 12x + 9.

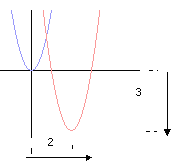
Transformando a função teremos:

(I) b/2a = -12/2.3 = -2 ⇒ (negativo) duas unidades para a direita

(II) c – b2/4a = 9 – (12)2/4.3 = 9 – 12 = - 3 (negativo) duas unidades para baixo.

(III) f(x) = 3x2 - 12x + 9 ⇒ f(x) = 3.(x - 2)2 - 3.

A figura abaixo mostra a relação entre os gráficos de f1(x) = 3x2 e f2(x) = 3x2 - 12x + 9 = 3.(x - 2)2 - 3

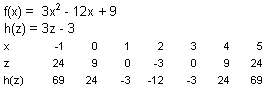


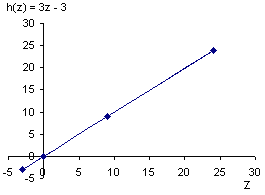
**5.7 - LINEARIZANDO A FUNÇÃO ax2 + bx + c**  
  
      Seja a função f(x) = ax2 + bx + c, escrita na forma f(x) = a(x + b/2a)2 + c - (b2/4a).

Se tomarmos (x + b/2a)2 = z e c - (b2/4a) = h, podemos escrever a função acima na forma f(z) = az + h, que tem a forma de uma função linear.

Vejamos isto aplicado à função f(x) = 3x2 - 12 + 9. Reescrevendo-a teremos: f(x) = 3.(x - 2)2 - 3.

Fazendo (x - 3)2 = z , podemos escrever a nova função h(x) = 3z - 3.

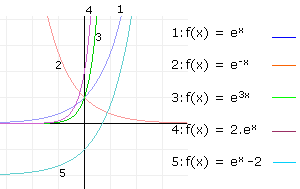
Construindo a tabela e o gráfico obtém-se: 



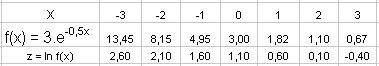
**5.8 - FUNÇÃO EXPONENCIAL**  
  
       A tabela abaixo mostra valores de uma função exponencial f(x) = ex e algumas de suas variações.

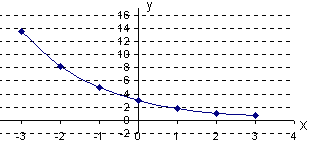


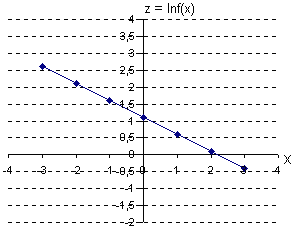
         Usando um mesmo sistema de eixos podemos obter o gráfico



        Comparando as diversas formas temos:  
A função (1) é crescente e (2) é decrescente. Observe o sinal do expoente.  
O gráfico aproxima-se mais que o gráfico (1) em relação ao eixo vertical,  para valores de x > 0. Observe os expoentes.   
Os gráficos (1), (2) e (3) passam pelo ponto (0, 1).  
O gráfico (4) passa pelo ponto (0, 2). Note que f4(x) = 2.f1(x).  
O gráfico (5) é semelhante ao gráfico (1) tendo um deslocamento de 2 unidades para baixo em relação ao gráfico 1.  
  
**5.9 - LINEARIZANDO UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL**  
  
       Seja f(x) = y = a.ebx. Fazendo z = ln y, teremos z = ln a + bx.lne ==> z = lna + bx, que corresponde a uma função do tipo h(x) = mx + h, que tem por gráfico uma reta.  
  
De acordo com o exposto, h(x) = -0,5x + ln3.  
Vejamos a tabela e os gráficos de f(x) e h(z), para f(x) = 3.e-0,5x.



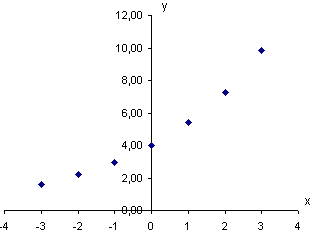


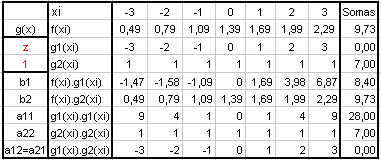


Vejamos uma aplicação.   
Seja a tabela abaixo, a partir da qual se deseja determinar a função interpoladora.

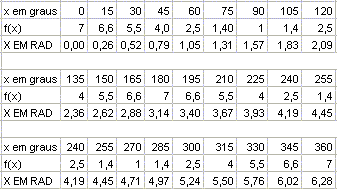
graf_tab_5

Plotando os pontos da tabela temos o gráfico

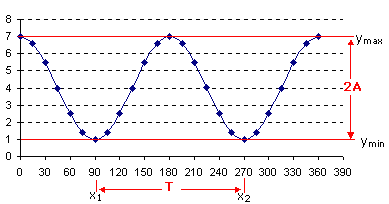


Pela forma do gráfico é de se supor ser a função interpoladora uma função exponencial do tipo y = aebx.  
Tentemos então plotar o gráfico de z = ln y = bx.ln e + lna = bx + lna. Para isto tomemos a tabela, agora com os valores de ln y.  
                                     graf_tab_6  
Vamos ajustar a curva a uma função do tipo h(x) = a1x + a2, onde a1 = b e a2 = ln a ⇔ a = ea2 , pelo processo dos mínimos quadrados.  
Construindo a tabela para montagem do sistema teremos:  
                                      
Da tabela obtemos o sistema: 28a1 + 0.a2 = 8,4 e 0.a1 + 7a2 = 9,73, cuja solução é a1 = 0,3 e a2 = 1,39.  
De a =  ea2, tiramos  a = e1,39 = 4,01. Temos ainda que b = a1. Assim, **y = 4,01.e0,3x.**

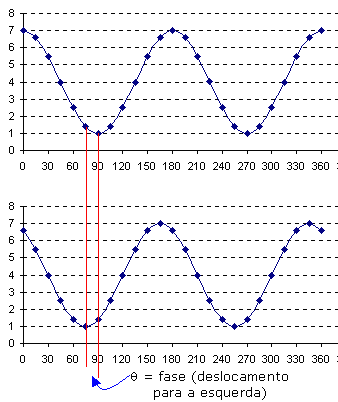
**5.10 - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS** As funções trigonométricas são do tipo y = C + A.cos(Wx + θ) ou y = C + A.sen(Wx + θ) que servem principalmente para descrever um movimento harmônico. Nestas funções C, A, W e θ são constantes, sendo:   
(1) "A" a AMPLITUDE - metade da distância entre os max(y) e min(y);  
(2) W = 2πΤ/ = a pulsação e T o período, quando T é expresso em radianos ou W = 360º/T quando o período for expresso em graus. No gráfico, o período é representado pela distância horizontal entre dois valores máximos (ou mínimos) consecutivos de x;  
(3)  "θ" a fase, que equivale ao deslocamento horizontal de /θW para a esquerda, em relação ao gráfico de   
y = C + A.cos(Wx) ou y = C + A.sen(Wx);  
(4) "C" é a translação vertical, ou seja, o deslocamento de C unidades para cima, se positivo, ou para baixo, se negativo, em relação ao gráfico de y = A.cos(Wx + θ) ou y = A.sen(Wx + θ), ou seja, C = (ymax+ymin)/2   
          A diferença entre os gráficos de y = C + A.cos(Wx + θ) e y = C + A.sen(Wx + θ) corresponde apenas a um deslocamento horizontal de 1/4 do período. Ou seja, o gráfico de y = C + A.sen(Wx + θ) é semelhante ao gráfico de y = C + A.cos(Wx + θ) sendo o primeiro deslocado 1/4 do período para a esquerda.  
  
         Vejamos inicialmente o gráfico de uma função do tipo y = C + A.cos(Wx) para C = 4, A = 3 e W = 2.  
No cálculo de f(x) é necessário que x e θ sejam expressos em radianos, podendo, entretanto, o gráfico ser construído com o eixo horizontal expresso em graus.  
A tabela abaixo mostra alguns valores para x e f(x).



O gráfico correspondente terá a forma abaixo, que mostra uma curva que se repete em intervalos iguais para x.



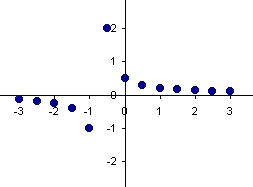
           Do gráfico podemos obter os seguintes elementos:  
(1) Amplitude: A = (ymax - ymin)/2 = (7 - 1)/2 = 3.  
(2) Período: T = x2 - x1 = 270º - 90º = 180º ou π radianos.  
(3) W = 360º/180º = 2π/π = 2.  
(4) C = (ymax + ymin)/2 = (7 + 1)/2 = 4.  
          A equação da curva é então y = 4 + 3.cos(2x).  
  
                      Seja agora a função y = 4 + 3.cos(2x + 30º).  Comparando o gráfico anterior com o dessa nova função teremos:



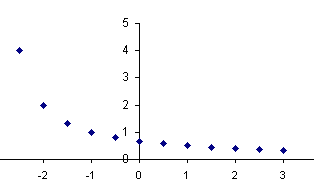
Observe que apenas ocorreu um deslocamento de θ/W = 30º/2 = 15º para a esquerda.   
  
           Observando o exposto acima, ao calcular C, A, W e θ, pode-se chegar à função que mais se aproxima da curva.

**5.11 - FUNÇÕES RACIONAIS**         Para uma função do tipo y = 1/(a1 + a2x), cujo gráfico é uma hipérbole conforme figura abaixo, podemos fazer z = 1/y = a1 + a2x e aplicar o processo dos mínimos quadrados em relação a z.   
  
Tomando como exemplo a função y = 1/(2 + 3x), teremos a tabela e o gráfico a seguir

graf_tab_10



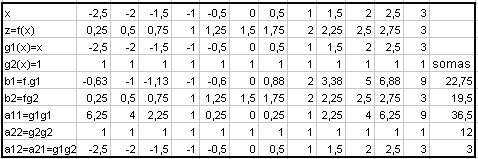
Aplicação: Determinar a função que interpola o conjunto de pontos abaixo:  
graf_tab_11  
Plotando o conjunto de pontos teremos o gráfico:



Sendo o gráfico uma hipérbole, tentemos usar a aproximação por f(x) = 1/(a1 + a2x).  
Façamos, z = 1/f(x) = a1 + a2x.  
Nestas condições teremos a nova tabela:

graf20

Aplicando o processo dos mínimos quadrados, com z = a1g1(x) + a2g2(x)  teremos:



Dos resultados do quadro acima, tem-se o sistema: 36,5a1 + 3a2 = 22,75  e 3a1 + 12a2 = 19,5 cuja solução é:  
a1 = 0,5 e a2 = 1,5.   
Portanto, z = 1/f(x) = 0,5x + 1,5 ==> f(x) = 1/(0,5x + 1,5).

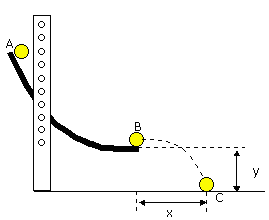
**EXERCÍCIOS**

**Para os exercícios abaixo use uma aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos e o processo de arredondamento.**1 – Escreva a equação da reta que se ajusta à curva f(x) = 4x3 no intervalo [2, 4].  
(a) usando apenas os limites 2 e 4.  
(b) dividindo o intervalo em dois intervalos [2, 3], [3, 4].

2 – (a) Dada a distribuição de pontos abaixo, escreva a equação da reta que mais se ajusta à seqüência, considerando uma distribuição discreta.

minqu_5_1

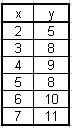
(b) Determinada a equação da reta, escreva-a na forma h(x) = ax + b e a seguir determine os valores de h(xi) onde xi são os valores dados para x.  
(c) Calcule os erros ei = |f(xi) - (hi). Qual foi o maior erro cometido?  
  
3 - Para a mesma tabela acima, determine a função de segundo grau que mais se ajusta à distribuição.   
  
4 - A figura abaixo mostra um sistema usado para relacionar o alcance (x) associado à altura (y) de queda. No dispositivo, a rampa permite mudar o valor da altura (y). A tabela ao lado mostra os valores experimentados.

O modelo físico associado ao experimento é y = (1/2)gx2/v02 ⇒ y = k.x2.

Determine a função de segundo grau que melhor se adapta à tabela. Considere os pontos como uma distribuição discreta. Sugestão, use g1(x) = x2, g2(x) = x e g3(x) = 1.

5 - Determine a equação da reta que melhor se ajusta à distribuição de pontos:



6 – Determine a função de segundo grau que se ajusta à curva f(x) = cos x no intervalo [0, π].

.

7 - Determine a função que se ajusta à distribuição de pontos abaixo



8 - Determine a função que se ajusta à distribuição de pontos abaixo

graf_tab_14

**CAP.06 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**

**6.1 – INTRODUÇÃO**

De acordo com o que se estudou em Cálculo II, a integral de uma função f(x) definida no intervalo [a, b] e estritamente positiva nesse intervalo, equivale à área limitada pelas verticais x = a e x = b, pela curva de f(x) e pelo eixo horizontal.

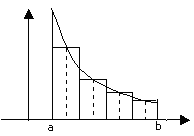
int_num_1_1

onde f(x) é a derivada de g(x) ou g(x) é a antiderivada de f(x).  
  
A integração numérica é usada principalmente quando o cálculo da antiderivada é impossível ou algebricamente complexa, bem como nos casos em que não se conhece exatamente a função.  
No segundo caso, é disponibilizada uma tabela com os valores de x e f(x) a partir da qual se determina a função que mais se aproxima dos valores tabelados conforme estudado nos dois capítulos anteriores.

Estudaremos os processos de cálculo de integrais definidas: regra do ponto médio, regra do trapézio e regra de Simpsom.  
  
         Nos cálculos usaremos o Excel ou o StarCalc para evitar operações repetitivas e cansativas. Você pode fazer o download do arquivo **int\_num\_a.exe** e descompactá-lo para uso na resolução de exercícios.  
Neste arquivo, criado no Excel (pode ser usado no StarCalc), são encontrados os diferentes métodos de integração numérica distribuídos por planilhas.  
O link para o download do arquivo acima se encontra no índice (esquerda) - Integração numérica - item 8.   
  
        Apesar da exigência da função ser estritamente positiva, os métodos são também válidos para qualquer tipo de função. Se o problema é apenas calcular a integral definida, basta considerar o intervalo como um todo. Para cálculo de áreas devemos considerar:  
(1) função estritamente negativa: toma-se o valor absoluto da integral; e  
(2) função que admite raízes. Se no intervalo de integração [a, b] existem as raízes x1, x2,... xn, com x1 < x2 < ...< xn, divide-se o intervalo [a, b] em intervalos menores [a, x1], [x1, x2], ... [xn-1, xn], [xn, b]. Calcula-se então as integrais nestes intervalos e somam-se seus valores absolutos.   
As raízes podem ser determinadas por processo gráfico, conforme já comentado em capítulos anteriores.

**6.2 – REGRA DO PONTO MÉDIO**

Seja f(x) uma função não-negativa e contínua no intervalo [a, b].   
A regra do trapézio consiste em dividir o intervalo [a, b] em “n” subintervalos de amplitude Δx = (b – a)/n

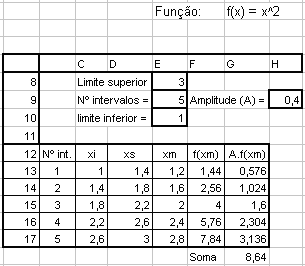


A área abaixo da curva f(x) é aproximada pela área dos retângulos que têm por base Δx **=** (b – a)/n onde n é o número de divisões e por altura f(xim) onde xim é o ponto médio de cada subintervalo.  
Cada subintervalo “i” tem como   
limite inferior xinfi = a + (i – 1)Δx e   
com limite superior xsupi = a + i.Δx = xinfi+1**.**

Assim, o ponto médio de cada subintervalo será   
xmedi = [a + (i–1)Δx + a + i.Δx]/2 = a + i. Δx - Δx /2.  
A área de cada retângulo será então Δx.f(xmedi) e em conseqüência:

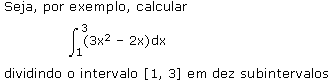
int_num_2_3  
  
int_num_2_4

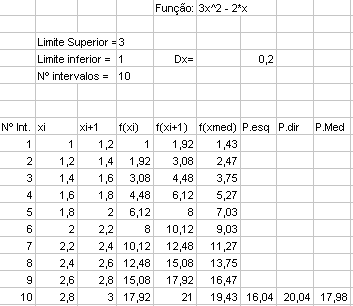
dividindo o intervalo [1, 3] em 5 subintervalos (5 iterações).  
Solução: a tabela abaixo permite concluir que a integral dada é aproximadamente igual a  8,64.



Valores das células:  
I9:  =(F8 - F10)/2;  
D13: = F10  
E13: = D13 + $I$9  (o sinal $ é usado para manter constante a indicação da célula I9 ao copiar a fórmula)  
F13: = (D13 + E13)/2  
G13: escreva a fórmula para calcular a função aplicada à célula F13.  
H13: =$I$9\*G13  
D14: = E13  
Copiar as células E13 a H13 para E14 a H14.  
Copiar as células D14 a H14 para as células inferiores até completar o número de intervalos.

**6.3 - REGRAS DO PONTO À ESQUERDA E DO PONTO À DIREITA**  
  
        Estes dois processos são variantes da regra do ponto médio. Na regra do ponto à esquerda substitui-se f(xmédio) por f(xinfi) onde  xinfi é o limite inferior de cada sub-intervalo enquanto que na regra do ponto à direita f(xmédio) é substituído por f(xsupi) onde xsupi é o limite superior de cada subintervalo.

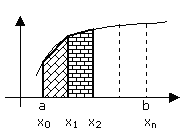
  
Solução: Usando o Excel teremos a tabela abaixo:



Observando a última linha da figura acima, verifica-se que a integral de 3x2 - 2x no intervalo [1, 3] com 10 iterações é igual a 16,04 pela regra do ponto esquerdo, 20,04 pela regra do ponto direito e 17,98 pela regra do ponto médio.  
Calculando a integral no intervalo teremos g(x) = x3 - x2 e g(3) - g(1) = (27 - 9) - (1 - 1) = 18.  
Note que a regra do ponto médio apresenta melhor aproximação.  
  
O cálculo do erro e a determinação do número de iterações (ou intervalos) necessários para que o erro seja inferior a um determinado limite será estudado em item posterior.

**6.4 - REGRA DO TRAPÉZIO**

       Seja f(x) uma função não-negativa e contínua no intervalo [a, b].  
A regra do trapézio consiste em dividir o intervalo [a, b] em “n” subintervalos de amplitude **Δx = (b – a)/n** e aproximar a curva de uma função linear. Isto faz considerar a função como linear em cada intervalo sendo a área abaixo da função calculada como aproximação da área do trapézio.

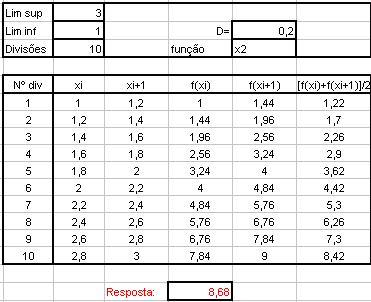


        Os trapézios têm áreas: Ai = (1/2).[f(xi) + f(xi + 1)].(b – a)/n, i = 0, 1, 2, ...(n – 1).   
Lembre-se que a área de um trapézio é igual ao produto da altura pela metade da soma das duas bases.  
A área será então:

int_num_3_2

= (1/2)[f(x) + 2.f(x1) + 2f(x2) + ... + 2.f(xn-1) + f(xn)].[(b – a)/n], sendo x0 = 1 e xn = b.

int_num_2_4  
dividindo o intervalo [1, 3] em 10 subintervalos.  
Solução:



Se você já fez download do arquivo int\_num\_a.exe, (integração numérica, item 8), no mesmo você encontra o processo aplicado ao outra função. Use-o para resolver seus exercícios.

**6.5 - REGRA DE SIMPSOM**

        Como foi visto anteriormente, na regra do trapézio, o intervalo é dividido em subintervalos nos quais a função é substituída por segmentos de retas.  
Na regra de Simpson, o intervalo [a, b] é dividido em um **número par** de subintervalos e em cada um dele a função f(x) é interpolada por uma função g(x) quadrática.  
Tomando dois intervalos sucessivos [x0, x1] e [x1, x2], g(x) deve passar pelos pontos (x0, f(x0)), (x1, f(x1)) e (x2, f(x2)), sendo f(x0) = g(x0), f(x1) = g(x1) e f(x2) = g(x2).  
         Assim,

int_num_4_1

Se usarmos o polinômio interpolador de Lagrange, teremos:  
g(x) = f(x0).(x - x1).(x - x2)/(x0 - x1).(x0 - x2) + f(x1).(x - x0).(x - x2)/(x1 - x0).(x1 - x2) + f(x2).(x - x0).(x - x1)/(x2 - x0).(x - x1).  
Integrando g(x) no intervalo [x0,x2] resulta [(x2 - x0)/6].[g(x0) + 4g[(x0+x2)/2] + g(x2)].   
Sendo (x2 - x0) = 2.[(b - a)/n], f(xi) = g(xi) e (x0 + x2)/2 = x1, podemos concluir

int_num_4_2

                                          = [(b - a)/3n].[f(x0) + 4f(x1) + f(x2)].

Repetindo o processo para todos os subintervalos, obtém-se:  
[(b - a)/3n].[f(x0) + 4f(x1) + f(x2)] + [(b - a)/3n].[f(x2) + 4f(x3) + f(x4)] + ....+ [(b - a)/3n].[f(xn-2) + 4.f(xn-1) + f(xn)] = [(b - a)/3n].[f(x0) + 4.f(x1) + 2f(x2) + 4f(x3) + ... + 2.f(xn-2) + 4f(xn-1) + f(xn)]   
onde x0 = a e xn = b.

Deste modo:

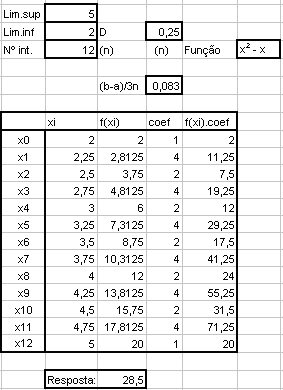
int_num_4_2

              = [(b - a)/3n].[f(x0) + 4.f(x1) + 2f(x2) + 4f(x3) + ... + 2.f(xn-2) + 4f(xn-1) + f(xn)]

Note que os coeficientes de f(xi) são: 1, 2, 4, 2, 4, ..., 4, 2, 4, 1.

int_num_4_3

Solução:



O valor exato da integral é 28,5.

**6.6 - ERROS NAS REGRAS DO TRAPÉZIO E DE SIMPSON**  
  
        Todas as regras descritas nos itens anteriores para cálculo de uma integral por processo numérico levam a erros que muitas vezes tornam o resultado não confiável. Assim, é necessário estabelecer um critério para aceitar como válida uma aproximação.

O erro ao aproximar

int_num_6_1

é:

(1) para a regra do trapézio  **|ET| > [(b-a)3/12n2].[máx|f"(x)|],  a < x < b**,  
onde n é o número de intervalos e f"(x) é a segunda derivada de f(x).  
  
(2) para a regra de Simpson **|ES|> [(b-a)5/180n4].[máx|fiv(x)|],  a < x < b**,  
onde n é o número de subintervalos e fiv(x) é a quarta derivada de f(x).  
  
Convém observar que tais procedimentos fornecem uma previsão para "n", entretanto, nem sempre o valor obtido para n, irá satisfazer as condições necessárias, pois a máquina utilizada tem suas limitações. Por esse deve-se usar o aplicativo corresponde e testar a partir do valor calculado para n.  
No aplicativo quando a diferença Si - Si-1 for inferior ao erro estabelecido, Si será o valor da integral com a aproximação desejada.   
       Com base nessas regras é possível determinar o número de intervalos necessários para que o erro cometido seja menor ou igual a um dado valor ε.  
Para isso pode-se observar as seguintes etapas:  
Para a regra do trapézio:  
1ª - Calcula-se f"(x);  
2ª - Determina-se o máximo de |f"(x)| no intervalo [a, b], que pode ser calculado por processos algébricos usando a primeira e segunda derivadas de f"(x) ou por processo gráfico.  
3ª - Resolve-se a desigualdade [(b-a)3/12n2].[máx|f"(x)|] <ε, em relação a n.Para a regra de Simpson,   
1ª - Calcula-se f"(x);  
2ª - Determina-se o máximo de |f"(x)| no intervalo [a, b];  
3ª - Resolve-se a desigualdade [(b-a)5/12n4].[máx|fiv(x)|] <ε, em relação a n.

Exemplo: Calcular, usando a regra do trapézio, com erro inferior a 0,01

int_num_7_4

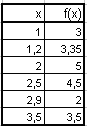
Solução:  
Temos inicialmente que f(x) = 4x3.   
Calculando f'(x) e f"(x): f'(x) = 12x2  e f"(x) = 24x.  
Como f"(x) é estritamente crescente, no intervalo [1, 2], max(f"(x)) = 24.2 = 48.  
Observação: se f"(x) não fosse estritamente crescente no intervalo, deveríamos aplicar os conhecimentos de cálculo integral onde, "uma função admite um valor máximo em um intervalo quando sua primeira derivada for igual a zero e a segunda derivada negativa" ou determinar por meio de construção gráfica.  
Tomando a = 1, b = 2, ε = 0,01, e aplicando na relação [(b-a)3/12n2].[máx|f"(x)|] < ε, teremos:

[(2 - 1)3/12n2].48 < 0,01 ⇒ 48.1/12n2 < 0,01 ⇒ 48/12.0,01 < n2 ⇒ n > (400)1/2 = 20.

Portanto, o número mínimo de subintervalos a ser usado é 21.

Usando o aplicativo método do trapézio, vemos que a integral para 21 iterações vale 15,0068 (o valor exato é 15). Como foi afirmado acima, o valor obtido para n é uma previsão. No exemplo, para n= 18, o erro já será inferior a 0,01.

**6.7 – A REGRA DO TRAPÉZIO PARA VALORES TABELADOS** Quando se deseja determinar a integral de uma função, da qual se conhece apenas os pontos, podemos aplicar o processo usando cada um dos subintervalos e aplicar para cada um a regra do trapézio.   
Entretanto, dependendo da amplitude de cada subintervalo, o erro pode ser de tal tamanho que o resultado não terá nenhuma validade. Nesse caso, é aconselhável obter uma função interpoladora e a partir da mesma obter intervalos menores e de igual amplitude.



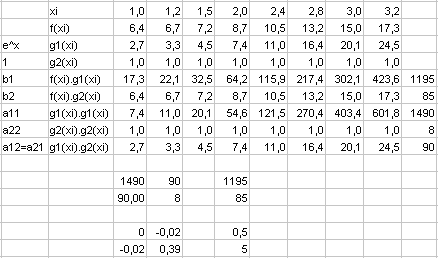
Vejamos um exemplo: Calcular a integral da função definida pela tabela no intervalo

Criando um algoritmo no Excel, teremos



Na primeira coluna lançam-se os valores de x1, x2, x3, ..., xn-1.  
Na segunda coluna lançam-se os valores de x2, x3, x4, ..., xn.  
Na terceira coluna lançam-se os valores de f(x1), f(x2), ..., f(xn-1).  
Na quarta coluna lançam-se os valores de (f(x2), f(x3), ..., f(xn).  
Na quinta coluna, primeira linha,  usa-se a fórmula xi+1 - xi, onde xi+1 e xi são referências às respectivas células.  
Na sexta coluna, primeira linha,  usa-se a fórmula D.[f(xi)+f(xi+1)]/2.  
Copiam-se a primeira linha das colunas 5 e 6 para as demais linhas.  
Na sexta coluna, abaixo da última linha, faz-se a soma dos elementos da sexta coluna.  
Esta soma é a integral da função tabelada.  
  
**6.8 – A REGRA DE SIMPSON PARA VALORES TABELADOS**

         Na regra de Simpson, é indispensável determina a função interpoladora, a partir da qual se obtém intervalos de igual amplitude. A determinação da função interpoladora pode ser feita a partir de qualquer processo descritos no capítulo quatro.  
Seja então determinar a integral da função cujos valores estão tabelados abaixo, no intervalo da tabela.  
x        1,0      1,2     1,5     2,0     2,4     2,8     3,0     3,2  
f(x)     6,4     6,7     7,2     8,7    10,5    13,2   15,0    17,3  
Iremos adotar os seguintes passos:  
1º: determinar a função interpoladora pelo processo dos mínimos quadrados  
2º: usar o processo de Simpson com 10 subintervalos  
Calculando a função interpoladora.  
Como a função é crescente, usaremos g1(x) = ex e g2(x) = 1.  
A tabela abaixo mostra os valores calculados



A função interpoladora é então h(x) = 0,5.ex + 5.1 = 0,5.ex + 5.  
  
Vamos integrar a função h(x) no intervalo [1; 3,3] com 10 subintervalos. Usando o arquivo int\_num\_a.xls, ou o Utilitário 1, constante do item 5 do capítulo Integração Numérica, resultará: 23,697.  
Deixamos a cargo do aluno os cálculos e a verificação.

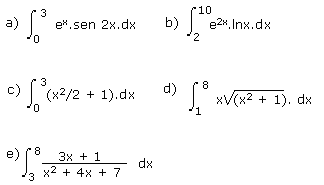
**EXERCÍCIOS**  
1. Calcule as integrais da função f(x) = x2, usando a regra do trapézio, no intervalo [1, 5] numa aritmética de ponto flutuante de 6 dígitos, dividido o intervalo [1, 5] em  
a) 4 subintervalos  
b) 8 subintervalos  
c) 16 subintervalos.  
  
int_num_7_1

2. Calcule a integral da função f(x) = cos x, usando a regra do trapézio no intervalo [0, π/2], usando uma aritmética de ponto flutuante de 6 dígitos, e dividindo o intervalo em 20 subintervalos.  
Usando seus conhecimentos ou uma tabela de funções trigonométricas calcule a diferença sen (π/2) – sen 0. Que conclusão você pode tirar ao comparar os resultados.  
  
3 - Resolva as integrais acima utilizando as regras do ponto médio, ponto esquerdo e ponto direito.  
  
4. Calcule a integral da função e2x , no intervalo [0, 3], usando 10 intervalos e uma aritmética de ponto flutuante de 5 dígitos, pelas regras de Simpson e do trapézio.

5. Calcule a integral da função e2x, no intervalo [0, 3], usando 10 intervalos e uma aritmética de ponto flutuante de 5 dígitos, pelas regras de Simpson e do trapézio.  
  
int_num_7_2  
Calcule o erro (relativo) [y – y’]/y sendo y o valor encontrado pela integração direta e y’ o valor aproximado obtido em cada um dos processos usados no exercício 5.

7. Calcule a integral da função (x3 – 1)/(2x + 1) no intervalo [1, 5], usando 8 intervalos e uma aritmética de ponto flutuante com 6 dígitos, pelas regras de Simpson e do trapézio.

8. Calcule as seguintes integras com 10 subdivisões:



9. Determine o número de intervalos necessários para que as integrais abaixo possam ser calculadas com erro inferior a 0,05 ao usar a regra do trapézio.

int_num_7_5

10. considerando as integrais do exercício anterior, determine o número de intervalos necessários para que as mesmas possam ser calculadas com erro inferior a 0,05 ao usar a regra de Simpson.  
  
11. Calcule a integral da função f(x), no intervalo [1, 6], definida pela tabela abaixo, usando a regra do trapézio.  
x =      1         2           3           4           5           6  
f(x) = 2,45    3,16      4,00       4,90       5,83       6,78  
  
12. Calcule, usando a regra de Simpson, calcule a integral de f(x), no intervalo [1, 6], definida pela tabela do exercício anterior, usando (a) 5 subintervalos; (b) 10 subintervalos.